ASYMPTOTISCHES VERHALTEN DES FEHLERS EINES DIFFERENZENVERFAHRENS FÜR SEMILINEARE SYSTEME PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dissertation

der Mathematischen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Harry Munz

aus Stuttgart

1983

ASYMPTOTISCHES VERHALTEN DES FEHLERS EINES DIFFERENZENVERFAHRENS FÜR SEMILINEARE SYSTEME PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dissertation

der Mathematischen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Harry Munz

aus Stuttgart

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 30.Juni 1983

Dekan: Prof. Dr. A. Schönhage

1.Berichterstatter: Prof. Dr. K.-P. Hadeler

2.Berichterstatter: Prof. Dr. R. D. Grigorieff

Inhaltsverzeichnis

§1 Einleitung 1

§2 Grundlegende Bezeichnungen 13

§3 Die Ausgangsprobleme und ihre Diskretisierung 20
3.1 Die Ausgangsprobleme 20
3.2 Die räumliche Diskretisierung 23

§4 Asymptotische Entwicklung des lokalen Fehlers 28
4.1 Der lokale Fehler bei Problem III (elliptischer Fall) 28
4.2 Der lokale Fehler bei Problem II 41

§5 Eine Abschätzung 50
5.1 Approximationsreguläre Operatoren 51
5.2 Eine diskrete Approximation von $L^2(\Omega)$ 55
5.3 Die inverse Stabilität von $\Delta^{oo}_{h,k}$ bezüglich der diskreten L^2-Norm 63
5.4 Beweis des Satzes 66

§6 Eine asymptotische Entwicklung für das elliptische Problem 73
6.1 Einige Lemmata 73
6.2 Ein Konvergenzsatz 104

§7 Die Konvergenz der Linienmethode 110
7.1 Das nichtlineare Problem 110
7.2 Das semilineare Problem 120

§8 Bemerkungen zur praktischen Verwertung der asymptotischen Fehlerentwicklungen 129
8.1 Theoretische Überlegungen 129
8.2 Numerische Beispiele 136

Literaturverzeichnis 143

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547612_0030

§1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Klasse von Differenzenverfahren zur räumlichen Diskretisierung schwach gekoppelter semilinearer parabolischer und elliptischer Differentialgleichungssysteme über einem beschränkten Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ mit Dirichlet-Randbedingungen hinsichtlich Stabilität, Konvergenz und Existenz asymptotischer Fehlerentwicklungen untersucht.

Die betrachteten Differentialgleichungssysteme sind von der Form

$$\partial_t u_j(t,x) = d_j(t,x)\,\Delta u_j(t,x) + f_j(t,x,u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)) \qquad (t,x) \in (0,T)\times\Omega,\ 1 \le j \le m \qquad (1.1a)$$

$$u_j(0,x) = \psi_j(x), \qquad x \in \bar{\Omega},\ 1 \le j \le m \qquad (1.1b)$$

$$u_j(t,x) = g_j(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T)\times\partial\Omega,\ 1 \le j \le m \qquad (1.1c)$$

oder

$$0 = d_j(x)\,\Delta u_j(x) + f_j(x,u_1(x),\ldots,u_m(x)) \qquad x \in \Omega,\ 1 \le j \le m \qquad (1.2a)$$

$$u_j(x) = g_j(x) \qquad x \in \partial\Omega,\ 1 \le j \le m. \qquad (1.2b)$$

Die Gleichungen (1.1a) bzw. (1.2a) seien gleichmäßig parabolisch bzw. elliptisch, d.h. die Funktionen d_j seien für $1 \le j \le m$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt.[1)]

Sind die Funktionen d_j, f_j und g_j in (1.1) von der Zeit unabhängig, so werden durch (1.2) gerade die stationären Zustände von (1.1) beschrieben.

---

1) Diese Voraussetzung erlaubt es, (1.2a) durch komponentenweise Division durch d_j auf eine etwas einfachere Gestalt zu bringen. Um eine einheitliche Darstellung des parabolischen und des elliptischen Falls zu erhalten, wird jedoch darauf verzichtet.

Eine Diskretisierung der räumlichen Variablen führt beim stationären Problem (1.2) auf ein Differenzenverfahren, das unmittelbar zur numerischen Berechnung von Näherungslösungen verwendet werden kann. Im Fall der zeitabhängigen Gleichungen (1.1) erhält man durch dieses Vorgehen ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen (longitudinale Linienmethode), das man dann mit Hilfe bekannter numerischer Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln. kann.

Differenzenverfahren zur numerischen Behandlung semilinearer elliptischer Randwertprobleme mit Dirichlet-Randbedingungen werden von verschiedenen Autoren betrachtet. Zur Untersuchung der Konvergenz werden entweder Randmaximum - bzw. Monotonieprinzipien für die Differenzenapproximation der Linearisierung von (1.2a) bzw. des Laplace-Operators benutzt oder es werden Methoden verwendet, die den direkten Methoden der Variationsrechnung entsprechen. Beide Beweisprinzipien finden auch bei Existenzbetrachtungen für das kontinuierliche Problem Verwendung (siehe etwa [3],[13],[29],[48],[56] bzw. [15],[20],[36]). Ihre Anwendung erfordert neben gewissen Monotonieeigenschaften der Diskretisierung des Laplace-Operators, daß f_u [2] bzw. f geeigneten Vorzeichen- bzw. Definitheitsbedingungen genügt.

Eine erste grundlegende Arbeit von BERS [6] zu diesem Thema stammt aus dem Jahre 1953. Er betrachtet das skalare ($m = 1$) elliptische Problem (1.2) unter der zusätzlichen Voraussetzung $f_u(x,u) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$ und alle $u \in \mathbb{R}$.[3] Dadurch wird die eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems gesichert.

---

2) $f := (f_1,\ldots,f_m)^T$

3) In Wirklichkeit betrachtet BERS die etwas allgemeinere Gleichung $-\Delta u = f(\cdot,u,\nabla u)$ für $f_u(\cdot,u,\nabla u) \leq 0$ unter der zusätzlichen Annahme, daß das Problem eine Lösung besitzt.

Ferner bewirkt die Vorzeichenbedingung an f_u die Stabilität der Diskretisierung der Linearisierung von (1.2a) um die exakte Lösung. Daraus folgt zusammen mit der Konsistenz die Konvergenz der Verfahren mit heute klassisch zu nennenden Methoden.

Diskretisierungen des stationären Problems (1.2) werden für $m = 1$ auch von PARTER und GREENSPAN in [48],[24] untersucht. Die Konvergenzbeweise in diesen beiden Arbeiten beruhen auf der Methode der monotonen Iteration, sind also im wesentlichen nur für Diskretisierungen, die auf M-Matrizen führen, anwendbar . Die Vorzeichenbedingung an f_u kann in diesem Fall durch die Forderung der Beschränktheit von f und der eindeutigen Lösbarkeit des Randwertproblems ersetzt werden. Aussagen über die asymptotische Konvergenzordnung lassen sich mit diesen Methoden nicht erzielen.

ALLGOWER und GUENTHER betrachten in [2] ebenfalls Diskretisierungen der skalaren stationären Gleichung (1.2a) unter der Voraussetzung $f_u \leq 0$, wobei sie an Stelle des Laplace-Operators jedoch allgemeinere lineare elliptische Differentialoperatoren in Divergenzform zulassen. Ausgangspunkt ihres Konvergenzbeweises sind einfache Überlegungen zur diskreten Konvergenz von Funktionenfolgen, aus deren Anwendung auf die Folge der Differenzenlösungen deren L_2-Konvergenz gegen die exakte Lösung folgen soll. Aussagen über die Konvergenzordnung werden nicht gemacht. Während der angegebene Konvergenzsatz, wie die vorliegende Arbeit zeigt, richtig ist, enthält der Beweis offensichtlich schwerwiegende Fehler.

Allgemeinere skalare quasilineare gleichmäßig elliptische Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(\cdot,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i(\cdot,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\cdot,u)u = g \qquad (1.3)$$

werden von McALLISTER [37] betrachtet. Er kombiniert bekannte 'kompakte' Diskretisierungen der partiellen Ableitungen mit

der "next-neighbour"- bzw. bei fehlenden gemischten Ableitungen mit der Shortley-Weller-Approximation am Rand. In der genannten Arbeit wird die Konvergenz der mit diesen Verfahren erhaltenen Näherungslösungen gegen die wahre Lösung gezeigt. Für die Shortley-Weller-Approximation wird außerdem die Konvergenzrate abgeschätzt. Die Beweise beruhen im wesentlichen auf Monotonieeigenschaften der Diskretisierungen. Sie werden teilweise nur für $c = 0$ geführt. Eine Verallgemeinerung auf $c \neq 0$ gelingt i.a. nur, wenn $c(\cdot,u)u$ die Bedingung von BERS erfüllt.

Ein wesentlicher Fortschritt im Hinblick auf die Allgemeinheit der in der stationären skalaren Gleichung (1.2a) zugelassenen Nichtlinearität f wurde von SIMPSON in [59],[60] erzielt. Er konnte bei Verwendung der Standard-(2n+1)-Punkte-Formel mit Shortley-Weller-Approximation am Rand die BERS-sche Vorzeichenbedingung an f_u durch die schwächere Voraussetzung der Isoliertheit der Lösungen des kontinuierlichen Problems ersetzen. Der Beweis benutzt eine Idee von BRAMBLE, der in [10] die genannte Diskretisierung für den Spezialfall $f(\cdot,u) = ku$ untersuchte, falls k kein Eigenwert des zugehörigen homogenen Problems ist. Wesentlich in beiden Arbeiten ist, daß der Differenzenoperator der Linearisierung von (1.2a) um eine exakte Lösung symmetrisch ist, also eine Orthogonalbasis aus zugehörigen Eigenvektoren existiert. Eine Übertragung dieser Methode auf den in dieser Arbeit betrachteten Fall ist i.a. nicht möglich, da bei der Linearisierung von f in der Regel eine Asymmetrie eingeschleppt wird. Sowohl in den Arbeiten von SIMPSON als auch in der Arbeit von BRAMBLE werden Abschätzungen der Konvergenzordnung angegeben.

Vereinfachte Beweise für einen Teil der Resultate aus [59], [60] findet man in MEYER-SPASCHE [41],[42].

Differenzenverfahren für noch allgemeinere nichtlineare elliptische Randwertprobleme werden schließlich von MEIS [40] und FREHSE [19]-[22] betrachtet.

MEIS behandelt nichtlineare Differtialgleichungen, die Eulergleichung eines definiten Variationproblems

$$\int F(x,u,\nabla u)\,dx = \min! \qquad (1.4)$$

auf dem Einheitsquadrat sind. Es werden Diskretisierungen, die die Definitheit der Funktionalmatrix des diskreten Problems garantieren, konstruiert. Anschließend wird das Konvergenzverhalten der zugehörigen Differenzenlösungen bezüglich diskreter L_2-Normen untersucht. Spezialisiert man die Voraussetzungen auf die skalare Gleichung (1.2a), so erhält man gerade die Bedingung von BERS. Die Beweise lassen sich leicht auf schwach gekoppelte semilineare Systeme übertragen, wenn man die Definitheit von f_u voraussetzt.

FREHSE betrachtete in [19]-[22] skalare nichtlineare elliptische Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F_i(x,u,\nabla u) + F_o(x,u,\nabla u) = 0 . \qquad (1.5)$$

über einem beliebigen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In [21] wird diese Gleichung auf kanonische Weise diskretisiert und, unter sehr schwachen Glattheitsvoraussetzungen, die Lösbarkeit der diskretisierten Gleichungen sowie die Konvergenz der Differenzenlösungen untersucht. Es wird gezeigt, daß die Existenz einer schwachen Lösung des zu (1.5) gehörenden Dirichlet-Problems und die L_p-Konvergenz, $1 < p < \infty$, einer Teilfolge der Differenzennäherungen gegen diese Lösung bereits aus der diskreten L_p-Beschränktheit der Differenzenlösungen und ihrer ersten Differenzenquotienten folgt. Für die diskrete L_p-Beschränktheit werden hinreichende Bedingungen angegeben, die im linearen Fall gerade die Definitheit des Differentialoperators erzwingen. Unter stärkeren Glattheitsvoraussetzungen sowie zusätzlichen Monotoniebedingungen, die auf skalare Gleichungen vom Typ (1.2a) übertragen gerade die Bedingung von BERS ergeben, wird schließlich die gleichmäßige Konvergenz der Differenzenlösungen gezeigt. Die Beweise basieren auf Resultaten aus der Theorie invers-monotoner Operatoren. Dies bedingt gewisse Einschränkungen bei der Approximation des

Randes. Insbesondere lassen sich diese Methoden i.a. nicht auf die in dieser Arbeit untersuchten Differenzenverfahren anwenden.
In [20] wird die Frage der Konvergenz der Lösungen der in [21] beschriebenen Diskretisierungen von (1.5) mit Methoden angegangen, die den direkten Methoden der Variationsrechnung entsprechen. Deshalb können nur solche Gleichungen untersucht werden, die Eulergleichung eines definiten Variationsproblems sind. Unter schwachen Voraussetzungen an die Glattheit der beteiligten Funktionen wird die gleichmäßige Konvergenz einer Teilfolge der Differenzenlösungen gegen eine wahre Lösung gezeigt. Bei eindeutig lösbaren Variationsproblemen wird sogar die gleichmäßige Konvergenz aller Differenzenlösungen bewiesen. Bedingt durch die schwachen Glattheitsvoraussetzungen und die verwendeten Beweismethoden werden in [20],[21] keine Aussagen über die Konvergenzordnung gemacht. Dieser Frage ist [22] gewidmet, wo, aufbauend auf [20],[21], für die Raumdimension $n = 2$ gezeigt wird, daß sich der globale Fehler wie der lokale verhält. Da die verwendeten Einbettungssätze nur für $n = 2$ gelten, lassen sich die Beweise nicht auf höhere Raumdimensionen übertragen. Nach entsprechenden Bemerkungen in [20],[21],[22] bleiben die Resultate für elliptische Systeme ($m \geq 2$) richtig.

Die Literatur zur longitudinalen Linienmethode bei nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen ist weit weniger umfangreich.

WALTER betrachtet in [71] eine skalare nichtlineare gleichmäßig parabolische Gleichung der Form

$$\partial_t u(t,x) = f(t,x,u(t,x),\frac{\partial u}{\partial x}(t,x),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)) \qquad (1.6)$$

über einem beschränkten Intervall. Wird die erste räumliche Ableitung entsprechend dem Wachstumsverhalten von f durch vorwärts bzw. rückwärts genommene Differenzenquotienten ersetzt, so garantiert die gleichmäßige Parabolizität bei Verwendung der gewöhnlichen 3-Punkte-Formel für die zweite räumliche Ableitung die Quasimonotonie der rechten Seite

des durch die Diskretisierung der Ortsvariablen entstandenen Differentialgleichungssystems. Mit Hilfe eines auf MÜLLER [44] und KAMKE [32] zurückgehenden Vergleichssatzes für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl.[70]) wird dann die Konvergenz gezeigt und die Konvergenzrate abgeschätzt.

Diese Methode wurde von VOIGT [69] auf den Fall einer skalaren Gleichung vom Typ (1.6) über einem beliebigen beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ übertragen, wobei sogar gemischte Ableitungen zweiter Ordnung auftreten dürfen. Dazu werden spezielle, dem jeweiligen Problem angepaßte Differenzenausdrücke monotoner Art zur Approximation der räumlichen Ableitungen so konstruiert, daß die rechte Seite des so entstehenden Differentialgleichungssystems wiederum quasimonoton ist.

In [69] wird noch eine weitere Arbeit von SCHLEIKOFER [58] zu diesem Problemkreis zitiert, die dem Autor aber leider nicht zugänglich war.

Konvergenzbetrachtungen zur longitudinalen Linienmethode bei nichtlinearen oder semilinearen Systemen parabolischer Differentialgleichungen sowie Untersuchungen über die Existenz asymptotischer Fehlerentwicklungen für diese Methode sind nicht bekannt.

Verfahren für das semilineare parabolische Problem (1.1), bei denen sowohl die Orts- als auch die Zeitableitungen durch Differenzenausdrücke approximiert werden, haben u.a. GORENFLO [25],[26], FITZKE [16],[17] und MIMURA, KAMETAKA und YAMAGUTI [43] behandelt. Typisch für alle genannten Arbeiten sind gewisse Monotoniebedingungen an den nichtlinearen Kopplungsterm.

In der vorliegenden Arbeit werden einfache symmetrische Differenzenformeln zur Approximation der räumlichen partiellen Ableitungen benutzt. Liegen in der Nähe des Randes von Ω

Gitterpunkte, in denen die Funktionswerte für die Näherung benötigt werden, nicht mehr im Gebiet, so werden in diesen Ersatzwerte durch polynomiale Extrapolation vom Grad k berechnet. Diese Methode zur Differenzenapproximation partieller Ableitungen in der Nähe krummliniger Ränder geht offensichtlich auf H.-O. KREISS zurück.

Das Konvergenzverhalten dieser Verfahren wurde erstmals von PEREYRA, PROSKUROWSKI und WIDLUND in [52] für die skalare Poisson - Gleichung untersucht. PEREYRA et al. zeigen für $1 \leq k \leq 6$ die Existenz einer asymptotischen Fehlerentwicklung der Form $u_h = \chi(\Omega_h)(u + h^2 e^{(1)} + h^4 e^{(2)}) + O(h^{k-0.5})$. Dabei bezeichnen u_h die Näherungslösung zur Gitterweite h, u die exakte Lösung, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ gewisse, von h unabhängige Funktionen und $\chi(\Omega_h)$ die charakteristische Funktion der Gitterpunkte.

BÖHMER verallgemeinert diese Resultate in [7] auf gewisse skalare quasilineare elliptische Gleichungen, deren Linearisierungen geeigneten Definitheitsbedingungen genügen. Für die skalare Gleichung (1.2a) erzwingt dies $f_u(\cdot,u) \leq 0$.

In [45],[46] beweist der Autor für $1 \leq k \leq 4$ die bereits in [52] für $k \leq 6$ geäußerte und durch numerische Beispiele unterstützte Vermutung, daß für beliebige skalare lineare gleichmäßig elliptische Gleichungen ohne gemischte Ableitungen asymptotische Fehlerentwicklungen der Ordnung h^{k+1} bezüglich diskreter L_∞- und damit auch bezüglich diskreter L_2-Normen existieren. Die Schwierigkeit beim Beweis von L_∞-Abschätzungen für die hier betrachteten Differenzenverfahren besteht darin, daß die zugehörigen Differenzenoperatoren für $k \geq 3$ i.a. nicht mehr von monotoner Art sind, der klassische, auf einem diskreten Maximumsprinzip beruhende Konvergenzbeweis (vgl. etwa [18]) also nicht mehr anwendbar ist.

Ähnliche Resultate wie in [45],[46] werden von BÖHMER in [8] bewiesen.

STARIUS schließlich zeigt in [61] die in [52] geäußerte Vermutung bezüglich diskreter L_2-Normen im Spezialfall der Poisson-Gleichung.

In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse aus [45], [46] auf den Fall isolierter Lösungen des Problems (1.2) verallgemeinert. Anschließend wird die Konvergenz der Linienmethode für schwach gekoppelte Systeme untersucht. Für lineare parabolische Gleichungen wird die Existenz asymptotischer Fehlerentwicklungen entsprechend dem stationären Fall gezeigt.

Alle Resultate dieser Arbeit lassen sich auf Differentialgleichungssysteme der Art (1.1) bzw. (1.2) mit einem beliebigen, gleichmäßig elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung ohne gemischte Ableitungen an Stelle des Laplace-Operators übertragen. Die Koeffizienten dieses Operators dürfen von j, x und in Gleichung (1.1a) auch von t abhängen.

Die Arbeit ist im einzelnen wie folgt gegliedert:

§2 enthält eine Übersicht über die im folgenden verwendete Notation.
In §3 werden die betrachteten Differentialgleichungssysteme genauer spezifiziert, die zugehörigen räumlichen Diskretisierungen eingeführt und verschiedene Darstellungen der Differenzenoperatoren hergeleitet.
In §4 wird unter geeigneten Glattheitsvoraussetzungen an die beteiligten Funktionen und den Rand des Gebiets die Existenz einer asymptotischen Entwicklung des lokalen Fehlers gezeigt. Die Beweise sind für reguläre Gitterpunkte klassisch. Schwierigkeiten treten lediglich in solchen Gitterpunkten nahe am Rand von Ω auf, bei denen eine Extrapolation notwendig ist. In diesen Punkten ist die Ordnung der Entwicklung typischerweise um zwei h-Potenzen geringer als in regulären Gitterpunkten.
In §5 wird eine Stabilitätsaussage bezüglich diskreter L_2-

Normen für die analog zu [45],[46] modifizierten Differenzennäherungen der Linearisierung des semilinearen elliptischen Systems um eine isolierte Lösung gezeigt. Der Beweis benutzt im wesentlichen die Erhaltung der a-Regularität einer diskreten Operatorfolge $(L_h),L$ bei einer Störung durch $(L_h),L$-kompakte Operatoren.
Die benötigten Ergebnisse aus der diskreten Funktionalanalysis (siehe etwa STUMMEL [63]-[65], GRIGORIEFF [27],[28], JEGGLE [31] und VAINIKKO [68]) werden in Abschnitt 5.1 bereitgestellt.
In 5.2 wird für den Raum $L^2(\Omega)$ eine geeignete diskrete Approximation durch Räume von Gitterfunktionen konstruiert. Für den Fall des Laplace-Operators wird dann in 5.3 die Stabilität des modifizierten Differenzenoperators mit Methoden von PEREYRA et el. [52] und MUNZ [45] bewiesen.
Der Beweis für den allgemeinen Fall folgt in 5.4. Ausgehend von den Ergebnissen in 5.3 wird die a-Regularität der Folge der modifizierten Differenzenoperatoren im Spezialfall des Laplace-Operators gezeigt. Die diskrete Kompaktheit der Einschränkung stetiger Multiplikatoren auf Räume von Gitterfunktionen folgt aus STUMMEL [66] und LADYŽENSKAJA et al. [34] .
Mit dem genannten Störungssatz für a-reguläre Operatorfolgen erhält man nun die a-Regularität der modifizierten Differenzennäherung der Linearisierung des elliptischen Problems und damit deren L_2-Stabilität.
Die nachfolgenden Betrachtungen ließen sich wesentlich vereinfachen, wenn man ein analoges Resultat bezüglich diskreter L_∞-Normen beweisen könnte. Dies scheitert daran, daß der Nachweis der diskreten $(L_h),L$-Kompaktheit der Einschränkung stetiger Multiplikatoren auf Räume von Gitterfunktionen bezüglichen diesen Normen nicht gelingt, da, im Gegensatz zum kontinuierlichen Fall, für den diskreten Fall bisher keine gleichmäßigen Schauderabschätzungen bis zum Rand bekannt sind.

In §6 wird die behauptete gleichmäßige asymptotische Fehlerentwicklung für das semilineare elliptische Problem bewiesen. Abschnitt 6.1 enthält dazu eine Reihe technischer Lemmata.

Von besonderer Bedeutung ist die durch Lemma 6.1.13 gegebene gleichmäßige Abschätzung beliebiger Gitterfunktionen durch die Normen ihrer Bilder unter der Diskretisierung der Linearisierung des elliptischen Systems um eine isolierte Lösung. Diese Abschätzung entspricht den Ungleichungen (55) und (57) in [46]. Während jedoch für die modifizierten Differenzennäherungen der dort betrachteten skalaren linearen elliptischen Operatoren leicht die diskrete L_∞-Stabilität zu zeigen ist, muß man hier mit der diskreten L_2-Stabilität auskommen. Dies bedingt wesentlich umfangreichere Beweise als in [46].
Die behauptete Existenz einer gleichmäßigen asymptotischen Fehlerentwicklung folgt schließlich in Abschnitt 6.2 mit einem Newton-Kantorovich-Argument.

§7 ist der Frage der Konvergenz der longitudinalen Linienmethode bei Anwendung der oben beschriebenen räumlichen Diskretisierungen gewidmet.
In Abschnitt 7.1 werden in Anlehnung an WALTER [71] allgemeine nichtlineare schwach gekoppelte parabolische Systeme (1.1) mit

$$\partial_t u_j(t,x)=f_j\left(t,x,u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x),\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}(t,x),\ldots,\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_n^2}(t,x)\right)$$

an Stelle von (1.1a) betrachtet. Dieser Abschnitt hält sich eng an die genannte Arbeit von WALTER. Grundlage der Konvergenzbetrachtung ist ein Vergleichssatz für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit quasimonotoner rechter Seite. Um die Quasimonotonie der Liniengleichungen zu sichern, sind starke Monotonievoraussetzungen an die Nichtlinearität notwendig.
In Abschnitt 7.2 werden wieder semilineare schwach gekoppelte parabolische Systeme betrachtet. In diesem Fall kann auf die meisten der Monotonievoraussetzungen aus 7.1 verzichtet werden. Der Konvergenzbeweis benutzt im wesentlichen die Methode der Variation der Konstanten.

Abschließend wird in Abschnitt 7.2 für lineare Systeme die Existenz einer asymptotischen Fehlerentwicklung analog zu §6 gezeigt. Der Grund für die Beschränkung auf lineare Gleichungen liegt darin, daß im allgemeinen Fall die Konstruktion geeigneter Entwicklungsfunktionen wegen den im parabolischen Fall zu erfüllenden Kompatibilitätsbedingungen zwischen Anfangs- und Randdaten Schwierigkeiten bereitet.
Die Beweise lassen sich sofort verallgemeinern, wenn passende Entwicklungsfunktionen bekannt sind. Dies ist beispielsweise unter unangemessen starken Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems und an den Rand von Ω der Fall.

In §8 wird unter Verwendung der in §6 bewiesenen asymptotischen Fehlerentwicklung ein Verfahren zur Verbesserung der numerischen Näherungslösungen semilinearer elliptischer Systeme konstruiert. Es handelt sich dabei um eine Adaption der bereits in MUNZ [45],[46] vorgestellt Variante der Deferred-Correction-Methode. Leider erfüllt diese nicht die Voraussetzungen von PEREYRA [50], Satz 3.2, so daß sich über den Gewinn bei ihrer Verwendung theoretisch nur sehr wenig aussagen läßt.
Diese Methode wird an einigen Beispielen mit unterschiedlich glatter Lösung für verschiedene Randinterpolationsparameter k getestet. Um die Dimension der zu lösenden nichtlinearen Gleichungssysteme und damit die benötigte Rechenzeit bei der Vielzahl der Testläufe auf ein vernünftiges Maß zu beschränken, werden nur skalare Gleichungen betrachtet.

§2 Grundlegende Bezeichnungen

Die nachfolgend vereinbarten Bezeichnungen werden im weiteren als bekannt vorausgesetzt.

Es seien stets $k, m, n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\alpha, T \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und $0 < T$.

$\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Mit $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir wie üblich den Vektorraum der n-Tupel $x := (x_1, \ldots x_n)^T$ über $\mathbb{K}$. Speziell seien e_i, $1 \leq i \leq n$, die i-ten kanonischen Einheitsvektoren in $\mathbb{K}^n$, $e_{-i} := -e_i$ und $e := (1, \ldots, 1)^T$.

Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ seien $|x|_p := (\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$,

$|x|_\infty := \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ und $d(x,y) := |x - y|_2$.

$K_p(x, \varrho) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y|_p < \varrho\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varrho > 0$, $1 \leq p \leq \infty$.

Seien $M, M' \subset \mathbb{R}^n$.
Für $u: M' \longrightarrow \mathbb{K}^m$ sei $\chi(m)u: M \longrightarrow \mathbb{K}^m$,

$$x \longmapsto (\chi(M)u)(x) := \begin{cases} u(x) & , \text{ falls } x \in M' \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Die charakteristische Funktion der Menge M werde mit $\chi(M,\cdot)$ bezeichnet.

$M_T := [0,T] \times M$, $M_0 := \{0\} \times M$.

Sind $v: M_T \longrightarrow \mathbb{K}^m$ und $t \in [0,T]$, so sei $v(t): M \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $x \longmapsto v(t,x)$.

Die j-te partielle Ableitung einer Funktion u nach einer Variablen x in einem Punkt y ihres Definitionsbereichs wird mit $\partial_x^j u(y)$ bezeichnet. $\partial_i^j := \partial_{x_i}^j$.

Für $J := (j_1,\dots,j_n)^T \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ ist $\partial^J := \partial_1^{j_1}\cdots\partial_n^{j_n}$.

Ω bezeichnet im folgenden ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit Rand Γ.

$C^{1,0}(\bar\Omega,\mathbb{K}) := \{u:\bar\Omega\to\mathbb{K}: \partial^J u$ stetig auf $\bar\Omega,\ 0\le|J|_1\le 1\}$

sei versehen mit der Norm $|u|_{C,1,0} := \sum_{j=0}^{1}\sum_{|J|_1=j}|\partial^J u|_C$,

wobei für $v\in C^{0,0}(\bar\Omega,\mathbb{K})$ $|v|_C := \max\{|v(x)|: x\in\bar\Omega\}$.

$\mathcal{C}^{1,0}(\bar\Omega_T,\mathbb{K}) := \{u:\bar\Omega_T\to\mathbb{K}: \partial_t^r\partial^J u$ stetig auf $\bar\Omega_T$, $0\le 2r+|J|_1\le 1\}$

trage die Norm $|u|_{\mathcal{C},1,0} := \sum_{j=0}^{1}\sum_{2r+|J|_1=j}|\partial_t^r\partial^J u|_C$.

Für $\alpha\neq 0$ bezeichne $C^{1,\alpha}(\bar\Omega,\mathbb{K})$ bzw. $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\bar\Omega_T,\mathbb{K})$ die in [35], Abschnitt I.1 definierten, dort mit $H^{1+\alpha}(\bar\Omega)$ bzw. $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar Q_T)$ bezeichneten Räume Hölderstetiger Funktionen, versehen mit den kanonischen, durch [35], Formel (I.1.9) bzw. (I.1.10) gegebenen Normen $|\cdot|_{C,1,\alpha}$ bzw. $|\cdot|_{\mathcal{C},1,\alpha}$.

Da die genaue Struktur dieser Räume im folgenden nicht benötigt wird, sei für Einzelheiten auf die genannte Literatur verwiesen.

Ferner definieren wir:

$C^{1,\alpha,m}(\bar\Omega,\mathbb{K}) := \{u:\bar\Omega\to\mathbb{K}^m: u_j\in C^{1,\alpha}(\bar\Omega,\mathbb{K}),\ 1\le j\le m\}$ sei versehen mit der Norm $|u|_{C,1,\alpha,m} := \max\{|u_j|_{C,1,\alpha}: 1\le j\le m\}$.

$\mathcal{C}^{1,\alpha,m}(\bar\Omega_T,\mathbb{K}) := \{u:\bar\Omega_T\to\mathbb{K}^m: u_j\in\mathcal{C}^{1,\alpha}(\bar\Omega_T,\mathbb{K}),\ 1\le j\le m\}$ trage die Norm $|u|_{\mathcal{C},1,\alpha,m} := \max\{|u_j|_{\mathcal{C},1,\alpha}: 1\le j\le m\}$.

$C^{1,\alpha,m}(\Omega,\mathbb{K}) := \{u:\Omega\to\mathbb{K}^m: u\in C^{1,\alpha,m}(\bar\Omega',\mathbb{K})$ für alle $\bar\Omega'\subset\Omega\}$.

$\mathcal{C}^{1,\alpha,m}(\Omega_T,\mathbb{K}) := \{u:\Omega_T\to\mathbb{K}^m: u\in\mathcal{C}^{1,\alpha,m}(\bar\Omega'_T,\mathbb{K})$ f.a. $\bar\Omega'_T\subset\Omega_T\}$.

$\bar{C}^{l,\alpha,m}(\Omega,\mathbb{K}) := \{u \in C^{0,0,m}(\bar{\Omega},\mathbb{K}): \chi(\Omega)u \in C^{l,\alpha,m}(\Omega,\mathbb{K})\}$

$\bar{\mathcal{C}}^{l,\alpha,m}(\Omega_T,\mathbb{K}) := \{u \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T,\mathbb{K}): \chi(\Omega_T)u \in \mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\Omega_T,\mathbb{K})\}$

$\hat{C}^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega},\mathbb{K}) := \{u:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : \chi(\bar{\Omega})u \in C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega},\mathbb{K}),\ \chi(\mathcal{C}\Omega)u=0\}$

$C^{l,\alpha,m}(\Gamma,\mathbb{K}) := \{u:\Gamma\to\mathbb{K}^m: \exists \tilde{u} \in C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega},\mathbb{K}),\ \chi(\Gamma)\tilde{u} = u\}$

$\mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\Gamma_T,\mathbb{K}) := \{u:\ \Gamma_T \in \mathbb{K}^m: \exists \tilde{u} \in \mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T,\mathbb{K}),\ \chi(\Gamma_T)\tilde{u} = u\}$

$C^l(\bar{\Omega},\mathbb{K}^m) := C^{l,0,m}(\bar{\Omega},\mathbb{K})$.

Wir fassen $C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega},\mathbb{K})$ bzw. $\mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T,\mathbb{K})$ als Teilraum von $C^{l,\alpha,m}(\Omega,\mathbb{K})$ bzw. $\mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\Omega_T,\mathbb{K})$ im Sinne der kanonischen Restriktion der Funktionen auf.

Wie üblich sei $\Gamma \in C^{l,\alpha}$, falls Γ eine (n-1)-dimensionale $C^{l,\alpha}$-Mannigfaltigkeit ist, bezüglich der Γ lokal "auf einer Seite liegt". Eine genaue Definition findet man u.a. in [34], [35], [1], [47].

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, M offen. Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnet $L^p(M,\mathbb{K})$ den Banachraum der $\mathbb{K}$-wertigen, bezüglich des Lebesgue-Maßes λ über M meßbaren und p-integrierbaren Funktionen, versehen mit der kanonischen Norm.

$L^\infty(M,\mathbb{K}) := \{u:M\longrightarrow\mathbb{K}: u\ \lambda\text{-meßbar},\ |u|_{L,\infty} < \infty\}$, wobei $|u|_{L,\infty} := \operatorname{ess\,sup}\{|u(x)|: x \in M\}$.

In üblicher Weise werden in $L^p(M,\mathbb{K})$, $1 \leq p \leq \infty$, λ-fast überall gleiche Funktionen identifiziert.

Für $u,v \in L^2(M,\mathbb{K})$ sei $((u,v)) := \int_M uv\,d\lambda$.

$L^p(M,\mathbb{K})$ wird gelegentlich als Teilraum vom $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ im Sinne einer Fortsetzung der Funktionen durch 0 aufgefaßt.

$W^{l,p}(M,\mathbb{K})$, $1 \leq p \leq \infty$, bezeichnet den Raum der l-fach schwach partiell differenzierbaren $u: M \longrightarrow \mathbb{K}$ mit Ableitungen $\partial^J u$, $1 \leq |J|_1 \leq l$, in $L^p(M,\mathbb{K})$, versehen mit der üblichen Norm $|\cdot|_{W,l,p}$ (vgl. [35]).

$W^{l,p,m}(M,\mathbb{K}) := \{u: M \to \mathbb{K}^m : u_j \in W^{l,p}(M,\mathbb{K}),\ 1 \le j \le m\}$ wird durch $|u|_{W,l,p,m} := \max\{|u_j|_{W,l,p} : 1 \le j \le m\}$ zu einem Banachraum.
Für $1 \le p \le \infty$ sei $L^{p,m}(M,\mathbb{K}) := W^{0,p,m}(M,\mathbb{K})$ und $|u|_{L,p,m} := |u|_{W,0,p,m}$.

$\mathfrak{M}(\Omega,\mathbb{K}) := \{u \in C^2(\bar{\Omega},\mathbb{K}) : \chi(\Gamma)u = 0\}$. $W_0^{2,2}(\Omega,\mathbb{K}) := \overline{\mathfrak{M}(\Omega,\mathbb{K})}$ sei der Abschluß von $\mathfrak{M}(\Omega,\mathbb{K})$ in $W^{2,2}(\Omega,\mathbb{K})$.

Um die Notation zu vereinfachen, werden wir bei allen bisher definierten Funktionenräumen im Falle $l = 0$, $\alpha = 0$, $m = 1$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auf die Angabe der entsprechenden Parameter in der Regel verzichten.

Sind E, F Banachräume, so bezeichnet L(E,F) den Raum der dicht definierten linearen Abbildungen von E nach F und B(E,F) den Teilraum der stetigen Abbildungen $L \in L(E,F)$.

Die von der Norm in E in kanonischer Weise auf B(E,E) induzierte Operatornorm werde mit denselben Symbolen wie die Norm in E bezeichnet.

Ist speziell $E = \mathbb{K}^n$, so sei $M(n,\mathbb{K}) := B(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n)$. Operatoren aus $M(n,\mathbb{K})$ werden mit ihrer Matrixdarstellung identifiziert.

Sei $\Lambda := (h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $h_i \to h_o$ $(i \to \infty)$. Wir schreiben abkürzend $h \in \Lambda$ für "h ist ein Glied der Folge Λ". Für $i_o \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\Lambda(i_o)$ das Endstück der Folge Λ ab dem und einschließlich des i_o-ten Gliedes.

Für $(u_{h_i})_{i \in \mathbb{N}}$ schreiben wir $u_h \to u$ $(h \to h_o,\ h \in \Lambda)$ anstelle von $u_{h_i} \to u$ $(i \to \infty)$, wobei wir die Angabe "$h \in \Lambda$" weglassen, wenn klar ist, bezüglich welcher Folge die Konvergenz zu verstehen ist.

Λ_o bezeichnet im folgenden stets eine streng monoton fallende Nullfolge.

Sei $X_{\Lambda_0} := (x_h)_{h \in \Lambda_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $|x_h|_\infty < h$ für alle $h \in \Lambda_0$.

Für $h \in \Lambda_0$ ist das Gitter $\mathbb{R}_h^n(x_h)$ mit Maschenweite h und Referenzpunkt x_h gegeben durch

$$\mathbb{R}_h^n(x_h) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = (a_1 h, \ldots, a_n h)^T + x_h, a_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

Wir verzichten im folgenden in der Regel auf die Angabe des Referenzpunktes und schreiben $\mathbb{R}_h^n$ an Stelle von $\mathbb{R}_h^n(x_h)$.

$$\Omega_h := \Omega \cap \mathbb{R}_h^n$$

$$\dot{\Omega}_{h,i} := \left\{ x \in \Omega_h : x + \zeta h e_i \in \Omega,\ \zeta \in [-1,1] \right\},\ 1 \leq i \leq n$$

$$\dot{\Omega}_h := \bigcap_{i=1}^{n} \dot{\Omega}_{h,i}$$

$$\Gamma_{h,i}^x := \Omega_h \setminus \dot{\Omega}_{h,i},\ 1 \leq i \leq n;\quad \Gamma_h^x := \Omega_h \setminus \dot{\Omega}_h.$$

$$\Gamma_h := \left\{ x \in \Gamma : \exists y \in \Omega_h, \exists \zeta \in \mathbb{R}, \exists i \in \{1,\ldots,n\} \text{ mit } x = y + \zeta e_i \right\}$$

$$\bar{\Omega}_h := \Omega_h \cup \Gamma_h .$$

Für $h > 0$, $x \in \mathbb{R}_h^n$ und $1 \leq i \leq n$ heißt

$$G(x,i) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = x + \zeta e_i, \zeta \in \mathbb{R} \right\}$$

die Gitterlinie durch x parallel zur i-ten Koordinatenachse.

Ist speziell $x \in \Omega_h$, so wird unter dem Gitterlinienabschnitt $G_a(x,i)$ durch x parallel zur i-ten Koordinatenachse diejenige, x enthaltende, zusammenhängende Teilmenge von $G(x,i) \cap \Omega$ verstanden, deren Abschluß genau zwei verschiedene Punkte aus Γ enthält.

$\dot{\Omega}_h$ ist gitterzusammenhängend, falls zu $x,y \in \dot{\Omega}_h$ stets eine zusammenhängende Menge $M(x,y) \subset \Omega$ existiert mit

(i) $x,y \in M(x,y)$

(ii) $M(x,y) \cap \Gamma_h^x = \emptyset$

(iii) Für alle $z \in M(x,y)$ gibt es ein $\bar{z} \in \Omega_h$ und ein $i \in \{1,\ldots,n\}$, so daß $z \in G(\bar{z},i)$.

Die Bedingung (v_k) ist (bezüglich Λ_0 und X_{Λ_0}) erfüllt, falls für alle $h \in \Lambda_0$, alle $x \Omega_h$ und alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:

$$|G_a(x,i) \cap \Omega_h| \geq \max\{k,2\} .$$

Die Bedingung (V_k) ist erfüllt, falls gilt:

(i) (v_k) ist erfüllt.

(ii) $\dot{\Omega}_h$ ist gitterzusammenhängend für alle $h \in \Lambda_o$.

(v_k) und (V_k) sind Voraussetzungen an die Glattheit von Γ, Λ_o und die Wahl von x_h.

Für $h > 0$, $M_h \subset \mathbb{R}_h^n \cup \Gamma_h$ und $\beta \in \{2, \infty\}$ ist
$H_\beta^m(M_h, \mathbb{K}) := \{u: M_h \to \mathbb{K}^m : |u|_{h,\beta,m} < \infty\}$, wobei
$|u|_{h,\infty,m} := \max\{|u_j(x)| : x \in M_h,\ 1 \le j \le m\}$ und
$|u|_{h,2,m} := \max\{\sqrt{(u_j,u_j)_h} : 1 \le j \le m\}$ mit
$(v,w)_h := h^n \sum_{x \in M_h} v(x)\,\overline{w(x)}$ für $v,w: M_h \to \mathbb{K}$.

Sind $m = 1$ oder $K = \mathbb{R}$, so werden diese Parameter wie im kontinuierlichen Fall in der Regel weggelassen.

Es sei $K_h: H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{K}) \to H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{K})$, $u \mapsto K_h u$,

$$(K_h u)(x) := u(x) + h^{-2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \big(u(x+he_i) + u(x-he_i) - 2u(x)\big)\Big)$$

Für $u,v \in H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{K})$ wird durch $(u,v)_{h,1} := (u, K_h v)_h = (K_h u, v)_h$ ein neues Innenprodukt auf $H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{K})$ definiert. Die zugehörige Norm werde mit $\|\cdot\|_{h,2}$ bezeichnet. Mit $\chi := 4n \cdot h^{-2}$ gilt $(1+\chi)^{-1}|u|_{h,2} \le \|u\|_{h,2} \le (1+\chi)|u|_{h,2}$ für alle $u \in H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{K})$.

Ist $M_h \subset \mathbb{R}_h^n \cup \Gamma_h$ beschränkt, so gilt

$$H_2^m(M_h, \mathbb{K}) = H_\infty^m(M_h, \mathbb{K}) =: H^m(M_h, \mathbb{K})$$

Für die zugehörigen Normen gilt:

$$|u|_{h,2,m} \le \big||u|_\infty\big|_{h,2} \le \big||u|_2\big|_{h,2} \le \sqrt{m}\,\big|u|_\infty\big|_{h,2} \le \sqrt{m\lambda_h(M_h)}\,|u|_{h,\infty,m},$$

wobei $|u|_p(x) := |u(x)|_p$ für $x \in M_h$.

$\lambda_h(M_h) := h^n \cdot \sum_{x \in M_h} 1$ bezeichnet dabei das "diskrete Maß" von M_h.

Für $\beta \in \{2,\infty\}$ wird $H^m_\beta(M_h,\mathbb{K})$ mit dem Teilraum $\{u \in H^m_\beta(\mathbb{R}^n_h \cup \Gamma_h,\mathbb{K}) : \mathrm{Trg}(u) \subset M_h\}$ von $H^m(\mathbb{R}^n_h \cup \Gamma_h,\mathbb{K})$ bzw., bei geeigneter "Nummerierung" der Punkte von M_h, mit $\mathbb{K}^N$, $N := h^{-n}\lambda_h(M_h)$, identifiziert.

Wir schreiben abkürzend χ_μ, $\mu = \sim,o,x,d$ für $\chi(\Omega_h)$, $\chi(\mathring{\Omega}_h)$, $\chi(\Gamma_h^x)$, $\chi(\Gamma_h)$.

Sind M_h, $M_h' \subset \mathbb{R}^n_h \cup \Gamma_h$ und $L \in L(H^m(M_h,\mathbb{K}),H^m(M_h',\mathbb{K}))$ so ist entsprechend $L^{\mu,\nu} := \chi_\mu L \chi_\nu$ für $\mu,\nu = \sim,o,x,d$.

§3 Die Ausgangsprobleme und ihre Diskretisierung

3.1 Die Ausgangsprobleme

In diesem Abschnitt werden die Probleme, für die anschließend Näherungsverfahren konstruiert und im weiteren hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften untersucht werden, näher spezifiziert. An die auftretenden Funktionen wollen wir dabei an dieser Stelle nur die angegebenen, minimalen Glattheitsbedingungen stellen. Genaueres hinsichtlich der zu fordernden Differenzierbarkeitseigenschaften und, bei Problem I, weitere Monotoniebedingungen werden im Verlauf der nachfolgenden Konsistenz- und Konvergenzbetrachtungen angegeben.

Das allgemeinste betrachtete Problem ist das folgende

Problem I

Seien $f: \Omega_T \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(t,x,u,r) \longmapsto f(t,x,u,r)$ mit $f_j \in C(\Omega_T \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq m$ und f_j monoton wachsend in r_i, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $g \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\Gamma_T)$ und $\psi \in C^{2,0,m}(\overline{\Omega})$ mit $\chi(\Gamma)\psi = \chi(\Gamma_o)g$.

Gesucht ist ein $u \in \overline{\mathcal{C}}^{2,0,m}(\overline{\Omega}_T)$ mit

$$\partial_t u_j(t,x) = f_j(t,x,u(t,x), \partial_1^2 u_j(t,x), \ldots, \partial_n^2 u_j(t,x)) \tag{3.1.1}$$

für $1 \leq j \leq m$, $(t,x) \in \Omega_T$,

$$u(0) = \psi\,, \tag{3.1.2}$$

$$\chi(\Gamma_T)u = g\,. \tag{3.1.3}$$

Das durch (3.1.1) gegebene nichtlineare partielle Differentialgleichungssystem ist wegen den Monotonieeigenschaf-

ten von f parabolisch und, da die Gleichungen für die einzelnen Komponenten nur über die Funktion u, nicht aber über deren Ableitungen zusammenhängen, schwach gekoppelt.

Eine im Hinblick auf die Anwendungen wichtige Unterklasse von (3.1.1) bilden die nachfolgend definierten schwach nichtlinearen parabolischen Systeme.

Problem II

Seien $\bar{d} \geq \underline{d} > 0$, $d \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\Omega_T)$ mit $\underline{d} \leq d_j(t,x) \leq \bar{d}$ für alle $(t,x) \in \Omega_T$ und alle $1 \leq j \leq m$, $f: \Omega_T \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(t,x,u) \longmapsto f(t,x,u)$, f stetig, $\Delta: C^2(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$, $u \longmapsto \Delta u$, $(\Delta u)(x) := \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_i^2 u\right)(x)$. Δ heißt Laplace-Operator.

Gesucht ist ein $u \in \bar{\mathcal{C}}^{2,0,m}(\Omega_T)$, das

$$\partial_t u_j(t,x) = d_j(t,x)\left(\Delta u_j(t)\right)(x) + f_j(t,x,u(t,x)) \qquad (3.1.4)$$

für $1 \leq j \leq m$ und $(t,x) \in \Omega_T$
zusammen mit (3.1.2) und (3.1.3) erfüllt.

Beispiele für das Auftreten von Systemen der Art (3.1.4) bei der mathematischen Behandlung physikalischer, biologischer und chemischer Fragestellungen findet man u.a. in [29] und [41].

Mit $\mathcal{L}(t): C^{2,0,m}(\Omega) \longrightarrow C^{0,0,m}(\Omega)$,

$$u \longmapsto \mathcal{L}(t)u := \left(d_1(t)\Delta u_1, \ldots, d_m(t)\Delta u_m\right)^T \qquad (3.1.5)$$

für $0 \leq t \leq T$ läßt sich (3.1.6) auch kompakter schreiben als

$$\partial_t u(t,x) = \left(\mathcal{L}(t)u(t)\right)(x) + f(t,x,u(t,x)). \qquad (3.1.6)$$

Hängen die d_j, $1 \leq j \leq m$, nicht von t ab, so schreiben wir $\mathcal{L}$ statt $\mathcal{L}(t)$. Sind f und g ebenfalls von t unabhängig,

so macht es Sinn, nach den stationären Lösungen von Problem II zu fragen. Dies führt auf schwach nichtlineare elliptische Systeme mit Dirichlet-Randbedingungen der folgenden Art

Problem III

Seien d, f und g wie in Problem II , aber von t unabhängig. Gesucht ist ein $u \in \bar{C}^{2,0,m}(\Omega)$ mit

$$-(\mathcal{L}u)(x) = f(x,u(x)) \quad \text{für } x \in \Omega \tag{3.1.7}$$

$$\chi(\Gamma)u = g \tag{3.1.8}$$

3.1.1 Definition

Sei u eine Lösung von Problem III . Es gebe Konstanten C_1, $C_2 > 0$, so daß für alle $(x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$ mit $|v - u(x)|_2 < C_1$ die Ableitung $\partial_u f(x,v)$ existiert, stetig von (x,v) abhängt und $|\partial_u f(x,v)|_\infty \leq C_2$ erfüllt.

u heißt isolierte Lösung, falls das linearisierte Problem

$$-(\mathcal{L}v)(x) = \partial_u f(x,u(x))v(x) \quad \text{für } x \in \Omega \tag{3.1.9}$$

$$\chi(\Gamma)v = 0 \tag{3.1.10}$$

in $\bar{C}^{2,0,m}(\Omega)$ nur die triviale Lösung $v = 0$ besitzt.

Ist f linear in u, so ist u genau dann isolierte Lösung von Problem III , wenn es die einzige ist.

Im weiteren sei stets die Existenz von Lösungen der betrachteten Probleme vorausgesetzt.

Während uns für Problem I keine allgemeinen Existenzsätze bekannt sind, findet man für Problem II diesbezügliche Aussagen u. a. in [3] ,[30] ,[35] ,[57] ,[73] , falls f bezüglich der Variablen u gewissen Wachstumsbedingungen genügt bzw. falls (3.1.4) sogenannte "invariante Mengen" besitzt. Die Lösbarkeit von Problem III wird u. a. in [3] ,[29] ,[34] [56] und [74] untersucht.

3.2 Die räumliche Diskretisierung

Seien $h \in \Lambda_o$, $k \in \mathbb{N}$ und (v_k) erfüllt.

Die Differenzenapproximationen der Probleme I - III auf den räumlichen Gittern $\bar{\Omega}_{h,T}$ bzw. $\bar{\Omega}_h$ entstehen aus den kontinuierlichen Problemen, indem man die auftretenden 2. Ableitungen durch die bekannte symmetrische 3 - Punkte - Differenzenformel, kombiniert mit polynomialer Extrapolation vom Grad k am Rand, ersetzt (vgl [52], [45], [46]).

Genauer: Sei $u \in H^m(\bar{\Omega}_h)$, $1 \leq i \leq n$.

Für $x \in \mathring{\bar{\Omega}}_{h,i}$ sei

$$(D_i^2 u)(x) := h^{-2}\big(u(x - he_i) - 2u(x) + u(x + he_i)\big) \qquad (3.2.1)$$

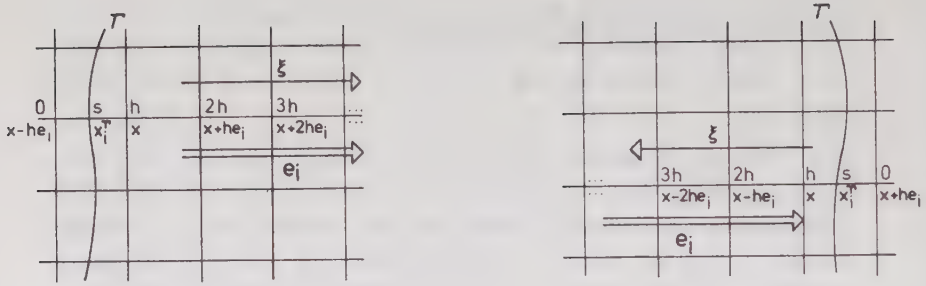
Für $x \in \Gamma^x_{h,i}$ liegt wegen (v_k) die Verbindungsstrecke zu genau einem der in (3.2.1) benötigten Nachbarpunkte nicht in Ω. Sei dies zunächst $x - he_i$. Gemäß Abbildung 1a werde ein eindimensionales lokales Hilfskoordinatensystem ξ eingeführt.

Sei $1 \leq j_o \leq k$. Das Lagrange-Grundpolynom $l^k_{j_o}$ vom Grad k zu den Stützstellen $\xi_o := s$, $\xi_j := jh$, $1 \leq j \leq k$, mit $l^k_{j_o}(\xi_j) = \chi(\{j_o\}, j)$, $1 \leq j \leq k$, ist gegeben durch:

$$l^k_{j_o}(\xi, s) := l^k_{j_o}(\xi) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq j_o}}^{k} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_{j_o} - \xi_j} \quad , \xi \in \mathbb{R} . \qquad (3.2.2)$$

Der durch polynomiale Interpolation vom Grad k in den Punkten x^Γ_i, x, $x + he_i$, ..., $x + (k-1)he_i$ gewonnene Näherungswert für u in $x - he_i$ ergibt sich damit zu

$$u(x - he_i) := u(x^\Gamma_i) l^k_o(0) + \sum_{j=1}^{k} u(x + (j-1)he_i) l^k_j(0) \qquad (3.2.3)$$



Figur 1

Indem man in (3.2.1) für $u(x - he_i)$ den Wert aus (3.2.3) benutzt, erhält man:

$$(D^2_{i,k}u)(x) = h^{-2}\Big((-2 + l^k_1(0))u(x) + (1 + l^k_2(0))u(x + he_i) + l^k_3(0)u(x + 2he_i) + \ldots + l^k_k(0)u(x + (k-1)he_i)\Big) + h^{-2}l^k_o(0)u(x^\Gamma_i) \quad . \qquad (3.2.4)$$

Ist $x - he_i \in \Gamma_h$, so stimmen (3.2.1) und (3.2.4) überein.

Für $\{x + the_i : 0 \le t \le 1\} \notin \Omega$ wird das Hilfskoordinatensystem gemäß Abbildung 1b definiert. (3.2.4) bleibt richtig, wenn man überall e_i durch e_{-i} ersetzt.

Ist der Interpolationsgrad am Rand aus dem Zusammenhang heraus klar, schreiben wir für $x \in \Gamma^x_h$ der Einfachheit halber oft auch $(D^2_i u)(x)$ an Stelle von $(D^2_{i,k}u)(x)$.

Damit ergibt sich das zu Problem I gehörende Differenzenproblem

Problem D I_h:

Seien f, g und ψ wie in Problem I.

Gesucht ist ein $u \in C([0,T],H^m(\bar{\Omega}_h)) \cap C^1([0,T],H^m(\Omega_h))$ mit

$$\partial_t u_j(t,x) = f_j(t,x,u(t,x),(D_1^2 u_j(t))(x),\ldots,(D_n^2 u_j(t))(x))$$

für $1 \leq j \leq m$ und $(t,x) \in \Omega_{h,T}$ (3.2.5)

$$u(0) = \chi(\bar{\Omega}_h)\psi \tag{3.2.6}$$

$$\chi(\Gamma_{h,T})u = \chi(\Gamma_{h,T})g\ . \tag{3.2.7}$$

(3.2.5) stellt ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung (3.2.6) dar. (3.2.7) geht über (3.2.4) in (3.2.5) ein.

Um später eine einfache Darstellung für die diskreten Näherungen von Problem III zu erhalten, definieren wir das diskrete Analogon $\Delta_{h,k}$ des Laplace-Operators Δ als

$$\Delta_{h,k}: H(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow H(\bar{\Omega}_h),\ u \longmapsto \Delta_{h,k}u$$

$$(\Delta_{h,k}u)(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (D_i^2 u)(x) & x \in \Omega_h \\ -\,u(x) & x \in \Gamma_h\ . \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Problem II geht über in

Problem D II_h:

Seien d_j, $1 \leq j \leq m$, f, g und ψ wie in Problem II.

Gesucht ist ein $u \in C([0,T],H^m(\bar{\Omega}_h)) \cap C^1([0,T],H^m(\Omega_h))$, das

$$\partial_t u_j(t,x) = d_j(t,x)(\Delta_{h,k}u_j(t))(x) + f_j(t,x,u(t,x)) \tag{3.2.9}$$

für $1 \leq j \leq m$ und $(t,x) \in \Omega_{h,T}$

zusammen mit (3.2.6) und (3.2.7) erfüllt.

Definiert man analog zu (3.1.5)

$$\mathfrak{L}_{h,k}(t)\colon H^m(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow H^m(\bar{\Omega}_h) \tag{3.2.10}$$

$$u \mapsto \mathfrak{L}_{h,k}(t)u := (\mathfrak{D}_1(t)\Delta_{h,k}u_1, \ldots, \mathfrak{D}_m(t)\Delta_{h,k}u_m)^T ,$$

wobei

$$\mathfrak{D}_j(t)\colon H(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow H(\bar{\Omega}_h),\ u \mapsto \mathfrak{D}_j(t)u$$

$$(\mathfrak{D}_j(t)u)(x) := \begin{cases} d_j(t,x)u(x) & \text{für } x \in \Omega_h \\ u(x) & \text{für } x \in \Gamma_h , \end{cases} \tag{3.2.11}$$

so läßt sich (3.2.9) schreiben als

$$\partial_t u(t,x) = (\mathfrak{L}_{h,k}(t)u(t))(x) + f(t,x,u(t,x)). \tag{3.2.12}$$

Sind die $\mathfrak{D}_j$, $1 \le j \le m$, nicht von t abhängig, so schreiben wir wieder $\mathfrak{L}_{h,k}$ statt $\mathfrak{L}_{h,k}(t)$.

Schließlich geht Problem III über in

Problem D III$_h$:

Seien d_j, $1 \le j \le m$, f und g wie in Problem III.

Gesucht ist ein $u \in H^m(\bar{\Omega}_h)$ mit

$$-(\mathfrak{L}_{h,k}u)(x) = f(x,u(x)) \quad \text{für alle } x \in \Omega_h \tag{3.2.13}$$

$$\chi(\Gamma_h)u = \chi(\Gamma_h)g . \tag{3.2.14}$$

Mit $\mathfrak{F}_h\colon H^m(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow H^m(\bar{\Omega}_h),\ u \mapsto \mathfrak{F}_h u$

$$(\mathfrak{F}_h u)(x) := \begin{cases} f(x,u(x)) & x \in \Omega_h \\ g(x) & x \in \Gamma_h \end{cases} \tag{3.2.15}$$

lassen sich (3.2.13), (3.2.14) zusammenfassen zu

$$-\mathfrak{L}_{h,k}u = \mathfrak{F}_h u \tag{3.2.16}$$

Sei $u \in H^m(\bar{\Omega}_h)$. Bei geeigneter "Numerierung" der Punkte in $\bar{\Omega}_h$ besitzt der Differenzenoperator $\mathfrak{L}_{h,k}$ die folgende Blockstruktur:

$$\mathfrak{L}_{h,k}u = \begin{bmatrix} \mathfrak{L}^{o\,o}_{h,k} & \mathfrak{L}^{o\,x}_{h,k} & 0 \\ \mathfrak{L}^{x\,o}_{h,k} & \mathfrak{L}^{x\,x}_{h,k} & \mathfrak{L}^{x\,d}_{h,k} \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^o \\ u^x \\ u^d \end{bmatrix} \qquad (3.2.17)$$

Schließlich sei noch unter Zugrundelegung der Struktur von (3.2.17)

$$\check{\mathfrak{L}}_{h,k} := \begin{bmatrix} \mathfrak{L}^{o\,o}_{h,k} & \mathfrak{L}^{o\,x}_{h,k} & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \qquad (3.2.18)$$

I bezeichnet in (3.2.17) und (3.2.18) die Identität auf $H^m(\Gamma^x_h)$ bzw. $H^m(\Gamma_h)$.

Indem man $m = 1$ und $d_1 = 1$ setzt, übertragen sich (3.2.17) und (3.2.18) auf $\Delta_{h,k}$ bzw. $\check{\Delta}_{h,k}$.

$\mathfrak{L}^{o\,o}_{h,k}$, $\mathfrak{L}^{o\,x}_{h,k}$, $\Delta^{o\,o}_{h,k}$, $\Delta^{o\,x}_{h,k}$ und damit $\check{\mathfrak{L}}_{h,k}$ und $\check{\Delta}_{h,k}$ sind offensichtlich von k unabhängig. Wir lassen diesen Parameter deshalb bei diesen Operatoren bisweilen weg.

§4 Asymptotische Entwicklung des lokalen Fehlers

4.1 Der lokale Fehler bei Problem III (elliptischer Fall)

Sei u eine Lösung des Problems III. Die anschließenden, die Funktionen d, f und g sowie das Gebiet Ω betreffenden Voraussetzungen sichern a priori die Existenz und hinreichende Glattheit einiger weiter unten näher spezifizierter Hilfsfunktionen. Es ist klar, daß die gemachten Annahmen dafür nicht notwendig sind. Es genüngt vielmehr, wenn im Einzelfall alle aus den Voraussetzungen gezogenen Folgerungen erfüllt sind.

4.1.1 Voraussetzungen und Definitionen

Seien $h \in \Lambda_o$, $1 \leq k \leq 4$, $l \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, $\Gamma \in C^{l,\alpha}$, $g \in C^{l,\alpha,m}(\Gamma)$, $d \in C^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ und $u \in C^{2,o,m}(\bar{\Omega})$ eine isolierte Lösung von Problem III.

Für $\varrho > 0$, $\tilde{u} \in C^{o,o,m}(\bar{\Omega})$ und $\tilde{u}_h \in H^m(\bar{\Omega}_h)$, $h \in \Lambda_o$ seien:

$$\mathcal{U}(\tilde{u},\varrho) := \{(x,v) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m : |v - \tilde{u}(x)|_\infty \leq \varrho\}$$

$$\mathcal{U}_h(\tilde{u}_h,\varrho) := \{(x,v) \in \bar{\Omega}_h \times \mathbb{R}^m : |v - \tilde{u}_h(x)|_\infty \leq \varrho\}$$

$$\bar{K}(\tilde{u}_h,\varrho,h) := \{v \in H^m_\infty(\Omega_h) : |v - \chi(\Omega_h)\tilde{u}_h|_{h,\infty,m} \leq \varrho\} .$$

Es gebe ein $\varrho_o > 0$, so daß $f \in C^{2,o,m}(\mathcal{U}(u,\varrho_o))$, falls $l \leq 3$, und $f \in C^{l-2,1,m}(\mathcal{U}(u,\varrho_o))$, falls $l \geq 4$.

Dann folgt unter iterativer Verwendung bekannter Sätze über lineare elliptische Randwertprobleme (vgl. [34], [36], [47]), daß $u \in C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega})$.

Ferner sei

$$\mathcal{L} : \mathcal{U}(u,\varrho_o) \longrightarrow M(m,\mathbb{R}), \quad (x,v) \longmapsto \mathcal{L}(x,v) := \partial_u f(x,v) .$$

$$\mathcal{L}_h\colon \mathcal{W}_h(u_h,\varrho_0)\to M(m,\mathbb{R}),\ (x,v)\mapsto\begin{cases}\mathcal{L}(x,v), & \text{falls } x\in\Omega_h\\ 0, & \text{falls } x\in\Gamma_h\end{cases}$$

$$B\colon \bar\Omega\to M(m,\mathbb{R}),\ x\mapsto\mathcal{L}(x,u(x))$$

$$B_h(v)\colon \Omega_h\to M(m,\mathbb{R}),\ x\mapsto\mathcal{L}_h(x,v(x)),\ v\in H^m_\infty(\Omega_h)$$

$$B_h := B_h(u)$$

$$C_3 := \max\{|B(x)|_\infty : x\in\bar\Omega\}$$

$$C_4(\varrho) := \max\{|B(x,v)-B(x)|_\infty : x\in\bar\Omega, |v-u(x)|_\infty\le\varrho\}\qquad 0\le\varrho\le\varrho_0$$

$$\mathcal{D}\colon \bar\Omega\to M(m,\mathbb{R}),\ x\mapsto \operatorname{diag}(d_1(x),\dots,d_m(x))$$

$$\tilde f\colon \bar\Omega\to\mathbb{R}^m,\ x\mapsto f(x,u(x))-B(x)u(x)$$

Die von B bzw. $B_h(v)$ auf $L^{2,m}(\Omega)$ bzw. $H^m_2(\Omega_h)$ erzeugten Multiplikationsoperatoren werden ebenfalls mit B bzw. $B_h(v)$ bezeichnet.

u ist die einzige Lösung der linearen elliptischen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}-(\mathcal{L}+B)u &= \tilde f \quad \text{in } \Omega\\ \chi(\Gamma)u &= g\ .\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Für $l\ge 4$ sei $e^{(1)}\in C^{l-2,\alpha,m}(\bar\Omega)$ die nach [34], Theorem 5.5.1 existierende und wegen der Isoliertheit von u eindeutige Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned}-((\mathcal{L}+B)e^{(1)})(x) &= \mathcal{D}(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{4!}\partial_i^4 u(x),\quad x\in\Omega\\ \chi(\Gamma)e^{(1)} &= 0\ .\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

Für $l\ge 6$ seien $\tilde e\in C^{l-2,\alpha,m}(\bar\Omega)$ und $e^{(2)}\in C^{l-4,\alpha,m}(\bar\Omega)$ die wiederum eindeutig existierenden Lösungen von

$$\begin{aligned}-((\mathcal{L}+B)\tilde e)(x) &= (f,e^{(1)})(x),\quad x\in\Omega\\ \chi(\Gamma)\tilde e &= 0\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

mit $(f,e^{(1)})(x)$

$$:= \frac{1}{2}(e^{(1)}(x)^T \partial_u^2 f_1(x,u(x))e^{(1)}(x), \ldots$$

$$\ldots, e^{(1)}(x)^T \partial_u^2 f_m(x,u(x))e^{(1)}(x))^T \qquad (4.1.4)$$

beziehungsweise von

$$-((\mathcal{L}+B)e^{(2)})(x)$$

$$= \mathcal{D}(x)\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{6!}\partial_i^6 u(x) + \frac{2}{4!}\partial_i^4 e^{(1)}(x)), \quad x \in \Omega \qquad (4.1.5)$$

$$\chi(\Gamma)e^{(2)} = 0$$

Für $l \leq 3$ sei $e^{(1)}$, für $l \leq 5$ $e^{(2)}$ und $\tilde{e}$ die Nullfunktion auf $\bar{\Omega}$.

Schließlich seien v_h, $w_h: \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$v_h := u + h^2 e^{(1)} + h^4 e^{(2)} \qquad (4.1.6a)$$

$$w_h := v_h + h^4 \tilde{e} \qquad (4.1.6b)$$

Das folgende, rein technische Lemma wird im Beweis von Lemma 4.1.3 benötigt.

4.1.2 Lemma

Seien $1 \leq j_o, j_1$, $v \in C^{j_1}([0,j_o h])$, $0 \leq s < h$, $\bar{\xi} \in [0,j_o h]$,

$\xi_j := j h$ für $1 \leq j \leq j_o$, $\xi_o := s$ und $P: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\xi \longmapsto P(\xi) := \sum_{j=0}^{j_o} v(\xi_j)\, l_j^{j_o}(\xi), \text{ wobei}$$

$$l_j^{j_o}(\xi) := \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{j_o} ((\xi - \xi_i)(\xi_j - \xi_i)^{-1}).$$

Dann gilt: $|\partial_\xi^{j_1} P(\bar{\xi})|_\infty \leq j_o j_1^{-1} \sum_{j=0}^{j_o - j_1} \frac{(2j_o)^j}{j!} |v|_{C,j_1}$.

Beweis: Für $j_1 > j_o$ ist nichts zu zeigen. Sei also $j_1 \leq j_o$. Wir definieren rekrusiv (vgl. [62], p.38):

$$v[\xi_j] := v(\xi_j) \quad \text{für } 0 \leq j \leq j_o\,, \tag{4.1.7}$$

$$v[\xi_{j,\dots,\xi_{j+j'}}] := \frac{v[\xi_{j+1,\dots,\xi_{j+j'}}] - v[\xi_{j,\dots,\xi_{j+j'-1}}]}{\xi_{j+j'} - \xi_j} \tag{4.1.8}$$

$$\text{für } 1 \leq j' \leq j_o,\ 0 \leq j \leq j_o - j'.$$

Nach einem bekannten Darstellungssatz für Interpolationspolynome ("Newtonform des Interpolationspolynoms", vgl.[62], Satz 2.1.3.6) läßt sich P schreiben als

$$P(\xi) = v[\xi_o] + v[\xi_o, \xi_1](\xi - \xi_o) + \dots + v[\xi_o, \dots, \xi_{j_o}](\xi - \xi_o)\dots(\xi - \xi_{j_o-1}) \tag{4.1.9}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \partial_\xi^{j_1} P(\xi) = {} & v[\xi_o,\dots,\xi_{j_1}] \sum_{J \in ((j_1))} 1 \\ & + v[\xi_o,\dots,\xi_{j_1+1}] \sum_{J \in ((j_1+1))} \prod_{\substack{i=0 \\ i \notin J}}^{j_1} (\xi - \xi_i) \\ & \vdots \\ & + v[\xi_o,\dots,\xi_{j_o}] \sum_{J \in ((j_o))} \prod_{\substack{i=0 \\ i \notin J}}^{j_o-1} (\xi - \xi_i) \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Dabei ist für $j_1 \leq j \leq j_o$:

$$((j)) := \{(\iota_1,\dots,\iota_{j_1}) : \iota_\mu \in \{0,1,\dots,j\},\ 1 \leq \mu \leq j_1,\ \iota_\nu \neq \iota_\mu \text{ , falls } \nu \neq \mu\}.$$

Nach [62] , Formel (2.1.4.3) gilt für $0 \leq j \leq j_o - j_1$

$$v[\xi_j, \ldots, \xi_{j+j_1}] = (j_1!)^{-1} \partial_\xi^{j_1} v(\hat{\xi}_j) \text{ für ein } \hat{\xi}_j \in [0, j_o h].$$

Daraus folgt für $0 \leq j \leq j_o - j_1$ mit $|v| := |v|_{C,j_1}$:

$$|v[\xi_j, \ldots, \xi_{j+j_1}]| \leq (j_1!)^{-1} |v| . \tag{4.1.11}$$

Rekursive Anwendung von (4.1.11) in (4.1.8) ergibt für $1 \leq j_2 \leq j_o - j_1$, $0 \leq j \leq j_o - j_1 - j_2$:

$$|v[\xi_j, \ldots, \xi_{j+j_1+j_2}]| \leq 2^{j_2} (j_1!)^{-1} |v| \cdot ((j_1 + j_2 - 1)!)^{-1} \cdot (j_1 - 1)! \cdot h^{-j_2} \tag{4.1.12}$$

Mit $|\bar{\xi} - \xi_j| \leq j_o h$ erhält man aus (4.1.10) und (4.1.12):

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^{j_1} P(\bar{\xi})| &\leq (j_1!)^{-1} |v| \, j_1! \\ &\quad + 2 (j_1!)^{-1} |v| (j_1!)^{-1} (j_1 - 1)! \, h^{-1} (j_1 + 1)! \, j_o h \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + 2^{j_o - j_1} (j_1!)^{-1} |v| ((j_o - 1)!)^{-1} (j_1 - 1)! \times \\ &\qquad \times h^{-(j_o - j_1)} (j_o!) ((j_o - j_1)!)^{-1} (j_o h)^{j_o - j_1} \\ &\leq j_o j_1^{-1} |v| \sum_{j=0}^{j_o - j_1} \frac{(2j_o)^j}{j!} . \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.1.3 Lemma

Es gelten die Vereinbarungen aus 4.1.1.

(i) Es gibt von h unabhängige Konstanten C_5, C_6, so daß für alle $h \in \Lambda_o$:

$$\left|((\mathfrak{L}_{h,k^+} B_h)\, \chi(\bar{\Omega}_h) v_h)(x) + \tilde{f}(x)\right|_\infty \leq \begin{cases} C_5 h^{\sigma_1}, & \text{falls } x \in \dot{\Omega}_h \\ C_6 h^{\sigma_2}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x, \end{cases} \tag{4.1.13}$$

wobei $\sigma_1 := \min\{1-2+\alpha, 5\}$, $\sigma_2 := \min\{1-2, k-1\}$.

(ii) Seien $l' \geq 2$, $0 \leq \alpha' \leq 1$ mit $l + \alpha' > 2$.

Dann gibt es Konstanten C_7, C_8, so daß

$$\left|D_i^2 \tilde{u}(x) - \partial_i^2 \tilde{u}(x)\right|_\infty \leq \begin{cases} C_7 h^{\sigma_3}, & \text{falls } x \in \dot{\Omega}_h \\ C_8 h^{\sigma_4}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x, \end{cases} \tag{4.1.14}$$

für alle $i \in \{1,\dots,n\}$, alle $h \in \Lambda_o$ und alle $\tilde{u} \in C^{l',\alpha',m}(\bar{\Omega})$ mit $|\tilde{u}|_{C,l',\alpha',m} \leq 1$. Dabei sind

$\sigma_3 := \min\{l' - 2 + \alpha', 2\}$, $\sigma_4 := \min\{l' - 2, k-1, 2\}$.

Beweis:

Der Beweis beider Aussagen verläuft nach denselben Ideen wie die Beweise von Lemma 1 und Lemma 2 in [46]. Eine ausführliche Darstellung des Beweises von (i) für den skalaren Fall findet man unter stärkeren Glattheitsvoraussetzungen in [45], Abschnitt 4.2.

Der Beweis wird im folgenden für $k = 4$ geführt. Die Beweise für $1 \leq k \leq 3$ verlaufen analog.

Ferner wollen wir zunächst $l \geq k + 1$ annehmen.

Sei $h \in \Lambda_0$.

a) $x \in \dot{\bar{\Omega}}_h$. Es gilt:

$$((\mathcal{L}_{h,k} + B_h)\, \chi(\bar{\Omega}_h) v_h)(x)$$
$$= h^{-2} \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} (v_h(x-he_i) - 2\, v_h(x) + v_h(x+he_i)) + B(x) v_h(x).$$

Einsetzen der Definition von v_h, Taylorentwicklung um x und Sortieren nach Potenzen von h ergibt

$$((\mathcal{L}_{h,k} + B_h)\, \chi(\bar{\Omega}_h) v_h)(x)$$
$$= (\mathcal{L} u)(x) + B(x) u(x)$$
$$+ h^2 \left[((\mathcal{L} + B) e^{(1)})(x) + \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{4!} \partial_i^4 u(x) \right] \qquad (4.1.15)$$
$$+ F(x,h),$$

mit
$$F_j(x,h) = h^3 d_j(x) \sum_{i=1}^{n} \Big[(5!)^{-1} (\partial_i^5 u_j(\xi_{i,j}) - \partial_i^5 u_j(\bar{\xi}_{i,j}))$$
$$+ (3!)^{-1} (\partial_i^3 e_j^{(1)}(\eta_{i,j}) - \partial_i^3 e_j^{(1)}(\bar{\eta}_{i,j})) \Big] \qquad (4.1.16)$$

für $l = 5$ und

$$F_j(x,h) =$$
$$= h^4 \left[((\mathcal{L} + B) e^{(2)}(x))_j + d_j(x) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{6!} \partial_i^6 u_j(x) + \frac{2}{4!} \partial_i^4 e_j^{(1)}(x) \right) \right]$$
$$+ h^4 d_j(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \Big[(6!)^{-1} (\partial_i^6 u_j(\xi_{i,j}) - \partial_i^6 u_j(x))$$
$$+ (6!)^{-1} (\partial_i^6 u_j(\bar{\xi}_{i,j}) - \partial_i^6 u_j(x))$$
$$+ \ldots\ldots + \qquad (4.1.17)$$
$$+ (2!)^{-1} (\partial_i^2 e_j^{(2)}(\zeta_{i,j}) - \partial_i^2 e_j^{(2)}(x))$$
$$+ (2!)^{-1} (\partial_i^2 e_j^{(2)}(\bar{\zeta}_{i,j}) - \partial_i^2 e_j^{(2)}(x)) \Big] ,$$

falls $l \geq 6$, wobei

$$\xi_{i,j},\ \bar{\xi}_{i,j},\ \eta_{i,j},\ \bar{\eta}_{i,j},\ \zeta_{i,j},\ \bar{\zeta}_{i,j} \in (x - he_j, x + he_i)$$
$$\text{für } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$$

$$(y,z) := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda y + (1-\lambda)z,\ 0 < \lambda < 1\} \quad \text{für } y,z \in \mathbb{R}^n.$$

Aus (4.1.16) folgt unmittelbar:

$$|F(x,h)|_\infty \le h^{3+\alpha} |d|_{C,0,0,m} \left(\frac{2}{5!} |u|_{C,5,\alpha,m} + \frac{2}{3!} |e^{(1)}|_{C,3,\alpha,m} \right), \tag{4.1.18}$$

falls $l = 5$.

Für $l \ge 6$ erhält man aus (4.1.17) unter Beachtung der Definition von $e^{(2)}$:

$$|F(x,h)|_\infty \le h^{4+\bar{\alpha}} |d|_{C,0,0,m} \left(\frac{2}{6!} |u|_{C,l,\alpha,m} + \frac{2}{4!} |e^{(1)}|_{C,l-2,\alpha,m} + \frac{2}{2!} |e^{(2)}|_{C,l-4,\alpha,m} \right), \tag{4.1.19}$$

wobei $\bar{\alpha} = \alpha$ für $l = 6$ und $\bar{\alpha} = 1$ sonst.

Man sieht sofort, daß für $l \ge 8$ sogar $|F(x,h)|_\infty \le h^6 \tilde{C}_1$ mit einer geeigneten, von $h \in \Lambda_0$ und $x \in \dot{\Omega}_h$ unabhängigen Konstanten $\tilde{C}_1$ gilt.

Aus (4.1.1), (4.1.2) und (4.1.15) - (4.1.19) folgt nun die erste Ungleichung von (i).

b) $x \in \Gamma_h^x$. Seien

$$I^{\pm}(x) := \{ i \in \{1,\dots,n\} : x \pm the_i \notin \Omega \text{ für ein } t \in [0,1] \}$$

$$I(x) := \{1,\dots,n\} \setminus (I^+(x) \cup I^-(x)) .$$

Es ist $I^+(x) \cup I^-(x) \neq \emptyset$. Sei im folgenden $i \in I^-(x) \neq \emptyset$. Der Fall $i \in I^+(x)$ wird analog behandelt.

Auf $X_i := \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + the_i,\ -1 \le t \le k\}$ werde das lokale eindimensionale Koordinatensystem ξ von Abschnitt 3.2 eingeführt.

Für $j_o \ge 0$, $v \in C^{j_o,0,m}(\bar{\Omega})$ und $0 \le \xi \le k\,h$ sei $Q(\cdot;i,v,x,j_o) \in C^{j_o,0,m}(X_i)$ gegeben durch

$$Q(\xi;i,v,x,j_o) := \begin{cases} v(x+(\xi-h)e_i), & \text{falls } s \le \xi \le k\,h \\ \hat{Q}(\xi;i,v,x,j_o), & \text{falls } 0 \le \xi \le s, \end{cases} \tag{4.1.20}$$

mit

$$\hat{Q}(\xi;i,v,x,j_o) := \sum_{j=0}^{j_o} \partial_i^j v(x_i^\Gamma)(j!)^{-1}(\xi - s)^j. \tag{4.1.21}$$

Für $0 \le j \le j_o$, $\eta \in [0,4h]$ gilt:

$$|\partial_\xi^j Q(\xi;i,v,x,j_o)|_\infty \le |v|_{C,j_o,0,m} \cdot \max\{(4h)^{j'} : 0 \le j' \le j_o - j\}. \tag{4.1.22}$$

Ferner sei für $0 \le j_o \le 4$, $v \in C^{0,0,m}(\bar{\Omega})$ und $\xi \in \mathbb{R}$

$$P(\xi;i,v,x,j_o) := \sum_{j=0}^{j_o} v(y_j) l_j^{j_o}(\xi). \tag{4.1.23}$$

Dabei sind $y_j := x + (j-1)he_i$, $1 \le j \le j_o$, $y_o := x_i^\Gamma$ und ξ_j, $l_j^{j_o}$, $0 \le j \le j_o$, wie in Lemma 4.1.2.

Für $0 \le j_o \le 4$, $0 \le j_1$, $v \in C^{j_1,0,m}(\bar{\Omega})$ und $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(\xi;i,v,x,j_o) = P(\xi;i,Q(\cdot;i,v,x,j_o),x,j_o). \tag{4.1.24}$$

Nach einem bekannten Satz über Interpolationsfehler (vgl. [62], p. 42) gibt es $\eta_{i,j} \in (0,4h)$, so daß für $1 \le j \le m$ gilt:

$$P_j(0;i,u,x,4) = Q_j(0;i,u,x,5) + \partial_\xi^5 Q_j(\eta_{i,j};i,u,x,5)\tfrac{s}{5}h^4. \tag{4.1.25}$$

Sei $\nu(1) := 3$, $\nu(2) := 2$. Da $Q(\cdot;i,e^{(\mu)},x,\nu(\mu))$, $\mu = 1,2$, i. a. nicht hinreichend oft differenzierbar ist, läßt sich für $P(\cdot;i,e^{(\mu)},x,\nu(\mu))$, $\mu = 1,2$, direkt keine (4.1.25) entsprechende Darstellung angeben. Nach dem oben genannten Satz erhält man lediglich

$$P_j(0;i,e^{(\mu)},x,\nu(\mu)-1) = Q_j(0;i,e^{(\mu)},x,\nu(\mu)) \qquad (4.1.26)$$

$$-\partial_\xi^{\nu(\mu)} Q_j(\eta_{i,j}^{(\mu)};i,e^{(\mu)},x,\nu(\mu))\cdot(-\frac{s}{\nu(\mu)})(-h)^{\nu(\mu)-1},$$

wobei $\eta_{i,j}^{(\mu)} \in (0,4h)$, $\mu = 1,2$ und $1 \leq j \leq m$.

Betrachtet man nun $P(\cdot;i,e^{(\mu)},x,\nu(\mu)-1)$ für $\mu = 1,2$ als Interpolationspolynom von $P(\cdot;i,e^{(\mu)},x,4)$ in den Stützstellen ξ_j, $0 \leq j \leq \nu(\mu)-1$, so gilt wiederum nach dem oben erwähnten Satz:

$$P_j(0;i,e^{(\mu)},x,\nu(\mu)-1) \qquad (4.1.27)$$

$$= P_j(0;i,e^{(\mu)},x,4)$$

$$-\partial_\xi^{\nu(\mu)} P_j(\eta_{i,j}^{(\mu)};i,e^{(\mu)},x,4)(-\frac{s}{\nu(\mu)})(-h)^{\nu(\mu)-1},$$

wobei wiederum $\bar{\eta}_{i,j}^{(\mu)} \in (0,4h)$, $\mu = 1,2$ und $1 \leq j \leq m$ sind.

Aus (4.1.25) - (4.1.27) zusammen mit der Linearität von $P_i(\cdot;i,v,x,j)$ bezüglich v folgt:

$$P(0;i,v_h,x,4) = \bar{v_h}(x - h e_i) + C(i,x,h) \qquad (4.1.28)$$

wobei

$$\bar{v_h}(x - h e_i) := Q(0;i,u,x,5) + h^2 Q(0;i,e^{(1)},x,3) +$$

$$+ h^4 Q(0;i,e^{(2)},x,2) \qquad (4.1.29)$$

und

$$C_j(i,x,h) := sh^4 \Big[\tfrac{1}{5}\big(\partial_\xi^5 Q_j(\eta_{i,j};i,u,x,5)\big)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\big(\partial_\xi^3 Q_j(\eta_{i,j}^{(1)};i,e^{(1)},x,3)$$
$$- \partial_\xi^3 P_j(\bar\eta_{i,j}^{(1)};i,e^{(1)},x,2)\big)$$
$$+ \tfrac{h}{2}\big(\partial_\xi^2 Q_j(\eta_{i,j}^{(2)};i,e^{(2)},x,2)$$
$$- \partial_\xi^2 P_j(\bar\eta_{i,j}^{(2)};i,e^{(2)},x,1)\big) \Big]. \qquad (4.1.30)$$

Mit (4.1.22) und komponentenweiser Anwendung von Lemma 4.1.2 erhält man unter Berücksichtigung von $0 < s \le h$:

$$|C(i,x,h)|_\infty \le h^5\Big(\tfrac{1}{5}|u|_{C,5,0,m} + \tfrac{13}{3}|e^{(1)}|_{C,3,0,m}$$
$$+ \tfrac{83}{2} h_1 |e^{(2)}|_{C,2,0,m}\Big), \qquad (4.1.31)$$

wobei $h_1 := \max\{h : h \in \Lambda_0\}$.

Nach Definition von $\mathcal{L}_{h,k}$ gilt:

$$((\mathcal{L}_{h,k} + B_h)\,\chi(\bar\Omega_h) v_h)(x) = B(x) v_h(x)$$
$$+ h^{-2}\,\mathcal{D}(x) \sum_{i \in I^+(x)} \big(-v_h(x - he_i) + 2v_h(x) - v_h^+(x + he_i)\big)$$
$$+ h^{-2}\,\mathcal{D}(x) \sum_{i \in I^-(x)} \big(-v_h^-(x - he_i) + 2v_h(x) - v_h(x + he_i)\big)$$
$$+ h^{-2}\,\mathcal{D}(x) \sum_{i \in I(x)} \big(-v_h(x - he_i) + 2v_h(x) - v_h(x + he_i)\big)$$
$$- h^{-2}\,\mathcal{D}(x) \sum_{i \in I^+(x) \cup I^-(x)} C(i,x,h)\,. \qquad (4.1.32)$$

Dabei ist $v_h^-(x - he_i)$ wie in (4.1.29) definiert. $v_h^+(x + he_i)$ bezeichnet das Analogon für $i \in I^+(x)$.

Die ersten drei Zeilen von (4.1.32) lassen sich nun unter Berücksichtigung von (4.1.22) wie im Fall a) behandeln, während die letzte Zeile von (4.1.32) sich mit Hilfe von (4.1.31) abschätzen läßt.

Nach geeigneter Wahl von C_6 folgt daraus die zweite Ungleichung aus (i).

Der Beweis von (ii) verläuft analog, indem man in der obigen Überlegung v_h durch $\tilde{u}$ ersetzt und die Taylorentwicklung entsprechend früher abbricht.

Der Fall $l \leq k$ läßt sich ebenfalls mit der oben angegebenen Methode behandeln, wenn man die auftretenden Taylorentwicklungen entsprechend der Glattheit der beteiligten Funktionen früher abbricht. Da (4.1.25) jetzt nicht mehr gilt, muß man nun auch für u mit der Technik des Einschiebens von Polynomen niedrigerer Ordnung arbeiten.

4.1.4 Bemerkung:

Die Technik des Einschiebens von Polynomen niedrigerer Ordnung erlaubt es, Analoga zu Lemma 4.1.3 auch für den Fall, daß die entsprechende Differenzierbarkeit von u, $e^{(1)}$ und $e^{(2)}$ nur auf Ω gesichert ist, zu beweisen, sofern die in den Abschätzungen auftretenden Ableitungen auf Ω gleichmäßig beschränkt sind. Im Endeffekt verliert man für $x \in \Gamma_h^x$ in diesem Fall eine h-Potenz gegenüber (4.1.13).

4.1.5 Korollar: (Konsistenz)

Es gelten die in 4.1.1 getroffenen Vereinbarungen.

Dann gibt es von h unabhängige Konstanten C_9, C_{10}, so daß

$$\left|(\mathfrak{L}_{h,k}w_h)(x) + f(x,w_h(x))\right|_\infty \leq \begin{cases} C_9 h^{\sigma_1}, & \text{falls } x \in \mathring{\Omega}_h \\ C_{10} h^{\sigma_2}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x, \end{cases} \tag{4.1.33}$$

mit σ_1, σ_2 wie in Lemma 4.1.3.

Beweis:

Es ist

$$
\begin{aligned}
&\left|(\mathfrak{L}_{h,k} w_h)(x) + f(x, w_h(x))\right|_\infty \\
&\quad \le \left|\left((\mathfrak{L}_{h,k} + \partial_u f(x,u(x)))\, \chi(\bar{\Omega}_h) v_h\right)(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + f(x,u(x)) - \partial_u f(x,u(x)) u(x)\right|_\infty \\
&\qquad + \left|\left((\mathfrak{L}_{h,k} + \partial_u f(x,u(x)))\, \chi(\Omega_h)(w_h - v_h)\right)(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + f(x, w_h(x)) - f(x,u(x))\right. \\
&\qquad\qquad\quad \left. - \partial_u f(x,u(x))(w_h(x) - u(x))\right|_\infty \\
&\quad =: I_1(x) + I_2(x) \qquad (4.1.34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= \left|\left((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h)\, \chi(\bar{\Omega}_h) v_h\right)(x) + \tilde{f}(x)\right|_\infty \\
&\le \begin{cases} c_5 h^{\sigma_1} & , \text{ falls } x \in \mathring{\bar{\Omega}}_h \\ c_6 h^{\sigma_2} & , \text{ falls } x \in \Gamma_h^x , \end{cases} \qquad (4.1.35)
\end{aligned}
$$

nach Lemma 4.1.3.

Für $1 \le j \le m$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f_j(x, w_h(x)) &= f_j(x,u(x)) + \partial_u f_j(x,u(x))(w_h(x) - u(x)) \\
&\quad + O(|w_h(x) - u(x)|_\infty^2) . \qquad (4.1.36)
\end{aligned}
$$

Für $l \ge 5$ gilt sogar

$$
\begin{aligned}
f_j(x, w_h(x)) &= f_j(x,u(x)) + \partial_u f_j(x,u(x))(w_h(x) - u(x)) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(w_h(x) - u(x))^T \partial_u^2 f_j(x,u(x))(w_h(x) - u(x)) \\
&\quad + O(|w_h(x) - u(x)|_\infty^3) . \qquad (4.1.37)
\end{aligned}
$$

Damit gilt unter Berücksichtigung der in 4.1.1 getroffenen Vereinbarungen sowie Lemma 4.1.3:

$$I_2(x) = 0, \text{ falls } l \leq 3, \tag{4.1.38a}$$

$$I_2(x) = O(h^4 |e^{(1)}|^2_{C,0,0,m}), \text{ falls } l = 4,5 \quad \text{und} \tag{4.1.38b}$$

$$I_2(x) \leq h^4 \left| ((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h) \chi(\bar{\Omega}_h) \tilde{e})(x) + (f, e^{(1)})(x) \right|_\infty + O(h^6)$$

$$\leq \begin{cases} n|d|_{C,0,0,m} \, C_7 \, h^{4+\sigma_3} |\tilde{e}|_{C,l-2,\alpha,m} + O(h^6), & x \in \mathring{\Omega}_h, \\ n|d|_{C,0,0,m} \, C_8 \, h^{4+\sigma_4} |\tilde{e}|_{C,l-2,\alpha,m} + O(h^6), & x \in \Gamma_h^x, \end{cases}$$

$$\text{falls } l \geq 6. \tag{4.1.38c}$$

Aus (4.1.34) - (4.1.38) folgt nun die Behauptung.

4.2 Der lokale Fehler bei Problem II

4.2.1 Lemma

Seien $1 \leq k \leq 4$, $l \geq 2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und
$\Omega_\Lambda := \{(t,x,h): h \in \Lambda_o, \ (t,x) \in \Omega_{h,T}\}$.
Mit den Bezeichnungen aus Problem II gelte zusätzlich zu den bereits gemachten Voraussetzungen: $\partial_t d \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T)$, $\partial_t g \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\Gamma_T)$, $\psi \in C^{1,\alpha,m}(\bar{\Omega})$, $\partial_t u(t) \in C^{1,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ mit $|\partial_t u(t)|_{C,1,\alpha,m} \leq C_{11} < \infty$ für ein geeignetes $C_{11} \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t < T$, $\partial_t^2 u \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T)$ und $\partial_t f(\cdot, u(\cdot)) \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T)$.

Schließlich seien σ_3, σ_4 wie in Lemma 4.1.3.

Dann gibt es Konstanten $C_{12} - C_{15}$, so daß für $H: \Omega_{\Lambda} \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$(t,x,h) \longmapsto H(t,x,h) := \partial_t u(t,x) - (\mathcal{L}_{h,k}(t)\, X(\bar{\Omega}_h) u(t))(x) - f(t,x,u(t,x))$$

die folgenden Abschätzungen für alle $(t,x,h) \in \Omega_{\Lambda}$ gelten:

$$\text{(i)} \qquad |H(t,x,h)|_\infty \leq \begin{cases} C_{12} h^{\sigma_3}, & \text{falls } x \in \mathring{\Omega}_h \\ C_{13} h^{\sigma_4}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x \end{cases} \tag{4.2.1}$$

$$\text{(ii)} \qquad |\partial_t H(t,x,h)|_\infty \leq \begin{cases} C_{14} h^{\sigma_3}, & \text{falls } x \in \mathring{\Omega}_h \\ C_{15} h^{\sigma_4}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Beweis:

(i) Nach Lemma 4.1.3(ii) gilt für $(t,x,h) \in \Omega_{\Lambda}$:

$$|(\mathcal{L}_{h,k}(t)\, X(\bar{\Omega}_h) u(t))(x) - (\mathcal{L}(t) u(t))(x)|_\infty$$

$$\leq \begin{cases} n\, |d|_{\ell,0,0,m}\, C_7\, |u|_{\ell,1,\alpha,m}\, h^{\sigma_3}, & \text{falls } x \in \mathring{\Omega}_h \\ n\, |d|_{\ell,0,0,m}\, C_7\, |u|_{\ell,1,\alpha,m}\, h^{\sigma_4}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x . \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Zusammen mit (3.1.6) folgt daraus (i).

(ii) Es bezeichne $\dot{\mathcal{L}}(t)$ bzw. $\dot{\mathcal{L}}_{h,k}(t)$, $0 \leq t \leq T$, $h \in \Lambda_0$, diejenigen Operatoren, die man erhält, wenn man in $\mathcal{L}(t)$ bzw. $\mathcal{L}_{h,k}(t)$ $d(t)$ durch $\partial_t d(t)$ ersetzt.

Dann gilt:

$$\partial_t H(t,x,h) = \partial_t^2 u(t,x) - (\dot{\mathcal{L}}_{h,k}(t) u(t))(x) - (\mathcal{L}_{h,k}(t) \partial_t u(t))(x) - \partial_t f(t,x,u(t,x)) \tag{4.2.4}$$

Nach Lemma 4.1.3(ii) gilt für $(t,x,h) \in \Omega_{\Lambda}$:

$$|(\mathcal{L}_{h,k}(t)\, X(\bar{\Omega}_h)\partial_t u(t))(x) - (\mathcal{L}(t)\partial_t u(t))(x)|_\infty$$

$$\leq \begin{cases} n|d|_{\ell,0,0,m} c_7 c_{11} h^{\sigma_3}, & \text{falls } x \in \dot{\Omega}_h \\ n|d|_{\ell,0,0,m} c_8 c_{11} h^{\sigma_4}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x \end{cases} \tag{4.2.5}$$

und

$$|(\dot{\mathcal{L}}_{h,k}(t)\, X(\bar{\Omega}_h)u(t))(x) - (\dot{\mathcal{L}}(t)u(t))(x)|_\infty$$

$$\leq \begin{cases} n|\partial_t d|_{\ell,0,0,m} c_7 |u|_{\ell,1,\alpha,m} h^{\sigma_3}, & \text{falls } x \in \dot{\Omega}_h \\ n|\partial_t d|_{\ell,0,0,m} c_8 |u|_{\ell,1,\alpha,m} h^{\sigma_4}, & \text{falls } x \in \Gamma_h^x. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Aus (4.2.4) - (4.2.6) zusammen mit

$$0 = \partial_t^2 u(t,x) - (\dot{\mathcal{L}}(t)u(t))(x) - (\mathcal{L}(t)\,\partial_t u(t))(x)$$
$$- \partial_t f(t,x,u(t,x))$$

für $(t,x) \in \bar{\Omega}_T$ folgt nun die Behauptung.

4.2.2 Bemerkung

Die in Lemma 4.2.1 gemachten Voraussetzungen an u sind erfüllt, falls, ähnlich wie in Abschnitt 4.1, die Funktionen d, f, g und ψ hinreichend glatt sind und falls g und ψ gewissen Veträglichkeitsbedingungen auf Γ_o genügen. Für Einzelheiten sei auf [35] verwiesen (vgl. auch Definition 4.2.4).

4.2.3 Bemerkung:

In Analogie zu Abschnitt 4.1 erwartet man auch für Problem II bzw. seine räumliche Diskretisierung die Existenz von "Entwicklungsfunktionen" $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ und $\tilde{e}$, so daß für $w_h := u + h^2 e^{(1)} + h^4(e^{(2)} + \tilde{e})$ der lokale Fehler von der in Lemma 4.1.3 für den elliptischen Fall angegebenen Ordnung

ist. Man sieht leicht ein, daß die genannten Entwicklungsfunktionen, falls sie existieren und hinreichend glatt sind, parabolischen Differentialgleichungen genügen müssen, die man aus (4.1.2), (4.1.3) und (4.1.5) durch Addition der Zeitableitung der gesuchten Funktion auf der linken Seite erhält.

Die bei der Berechnung des lokalen Fehlers benutzte Taylorentwicklung erfordert eine gewisse Glattheit der "Entwicklungsfunktionen", die i.a. nur dann gewährleistet ist, wenn die die "Entwicklungsfunktionen" definierenden Differentialgleichungen zusammen mit den jeweiligen Anfangs- und Randbedingungen den bereits in Bemerkung 4.2.2 genannten Kompatibilitätsbedingungen auf Γ_o genügen. Die trivialen Anfangs- und Randbedingungen verletzen i.a. diese Kompatibilitätsbedingungen. Für eine andere Wahl der Anfangs- und Randdaten in den Bestimmungsgleichungen für die Entwicklungsfunktionen sind offensichtlich Korrekturen an den entsprechenden Größen sowie an der rechten Seite des Problems $D\ II_h$ erforderlich. Um praktisch brauchbare Verfahren zu erhalten, müssen diese Korrekturen mit einem angemessenen Aufwand zu bestimmen sein. Ferner sollten durch diese Korrekturen keine unnatürlich hohen Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten der Differentialgleichung eingeschleppt werden. Dieses Problem konnte für die allgemeine semilineare Gleichung nicht auf befriedigende Art gelöst werden.

Deshalb werden wir uns im folgenden auf gewisse schwach gekoppelte lineare parabolische Systeme beschränken, für die ein Algorithmus zur Erzeugung brauchbarer Anfangs- und Randbedingungen für die Bestimmungsgleichungen der Entwicklungsfunktionen sowie zur Berechnung der Korrekturen an den diskretisierten Gleichungen relativ einfach angegeben werden kann.

Problem II S

Seien d, g und ψ wie bei Problem II, d von der Zeit unabhängig. Ferner seien $B: \bar{\Omega} \to M(m,\mathbb{R})$ stetig und $f \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T)$. Gesucht ist ein $u \in \bar{\mathcal{C}}^{2,0,m}(\Omega_T)$, das

$$\partial_t u(t,x) = (\mathfrak{L} u(t))(x) + B(x)u(t,x) + f(t,x) \qquad (4.2.7)$$

für alle $(t,x) \in \Omega_T$, zusammen mit (3.1.2) und (3.1.3) erfüllt.

Das zugehörige diskrete Problem lautet dann für $h \in \Lambda_o$:

Problem D II S_h-

Seien B, d, f, g und ψ wie in Problem II S, $1 \leq k \leq 4$.
Gesucht ist ein $u \in C([0,T], H^m(\bar{\Omega}_h)) \cap C^1([0,T], H^m(\Omega_h))$, das

$$\partial_t u(t,x) = (\mathfrak{L}_{h,k} u(t))(x) + B(x)u(t,x) + f(t,x) \quad (4.2.8)$$

für alle $(t,x) \in \Omega_{h,T}$, zusammen mit (3.2.6) und (3.2.7) erfüllt.

4.2.4 Definition (vgl. [35], p.319f)

Seien f, g und ψ hinreichend glatt.

ψ und g erfüllen die Kompatibilitätsbedingung der Ordnung $j_o \geq 0$ bezüglich (4.2.7), falls für $0 \leq j \leq j_o$ gilt:

$$\partial_t^j g(0) = \chi(\Gamma)\left[(\mathfrak{L}+B)^j \psi + \sum_{i=0}^{j-1} (\partial_t^i((\mathfrak{L}+B)^{j-i-1} f)(0)\right] \qquad (4.2.9)$$

4.2.5 Konstruktion von Anfangs- und Randbedingungen

Seien $j_o \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. Wir betrachten (4.2.7) mit $d \in C^{2j_o-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$, $B = (b_{i,j})$, $b_{i,j} \in C^{2j_o-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ für $1 \leq i,j \leq m$, $f \in \mathcal{C}^{2j_o-2,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T)$ und $\Gamma \in C^{2j_o,\alpha}$.

Ferner besitze das zugehörige elliptische Problem

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L} + B)v &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \chi(\Gamma)v &= 0\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

nur die triviale Lösung $v = 0$.

Wir definieren rekursiv.

$$\psi^{(j_o+1)} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m, \quad x \longmapsto \psi^{(j_o+1)}(x) = 0.$$

$\psi^{(j)} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ ist Lösung des elliptischen Randwertproblems.

$$\begin{aligned}-(\mathfrak{L}+B)\psi^{(j)} &= \partial_t^{j-1} f(0) + \psi^{(j+1)} \quad \text{in } \Omega \\ \chi(\Gamma)\psi^{(j)} &= 0\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

für $j_o \geq j \geq 1$.

Nach [34], Theorem VII.5.1 ist $\psi^{(1)} \in C^{2j_o,\alpha,m}(\bar{\Omega})$.

Wie man durch Einsetzen leicht nachprüft, erfüllen $\psi := \psi^{(1)}$ und $g = 0$ die Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung j_o bezüglich (4.2.7).

4.2.6 Bemerkungen:

(i) Die in 4.2.5 konstruierten Anfangs- und Randbedingungen sind optimal in dem Sinne, daß die zugehörige Lösung von (4.2.7) unter den an B, d, f und ψ gestellten Bedingungen die nach [35], Theorem IV.5.2 maximal mögliche Glattheit besitzt.

(ii) Bei zeitabhängigem $\mathfrak{L}$ und B treten in (4.2.9) zusätzliche Terme auf, die "zeitliche Ableitungen" von $\mathfrak{L}$ und B enthalten. Mit Hilfe des in 4.2.5 dargestellten Verfahrens lassen sich in diesem Fall geeignete Anfangswerte nur unter wesentlich stärkeren Lösbarkeitsforderungen als (4.2.10) berechnen.

(iii) Verzichtet man auf die Optimalität der Anfangs- und Randbedingungen im Sinne von (i), so lassen sich auch für den zeitabhängigen Fall leicht geeignete Anfangs- und Randbedingungen angeben, indem man g als Polynom hinreichend hohen Grades in t mit Koeffizienten in $C^{2j_0,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ ansetzt und diese geeignet wählt. Leider führt dies über die Glattheitsvoraussetzungen an ψ und g zu sehr hohen Differenzierbarkeitsforderungen an f.

4.2.7 Definition der Entwicklungsfunktion

Wir benutzen nun die Konstruktion aus 4.2.5 zur Definition geeigneter "Entwicklungsfunktionen" für Problem II S bzw. $D\,II\,S_h$.

Seien $l \geq 4$ und $0 < \alpha < 1$.

Wir betrachten Problem II S mit $d \in C^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$, $B = (b_{i,j})$, $b_{i,j} \in C^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ für $1 \leq i,j \leq m$, $f \in \mathcal{C}^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T)$, $g \in \mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\Gamma_T)$, $\psi \in C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ und $\Gamma \in C^{l,\alpha}$. Ferner sollen ψ und g die Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung [l/2] bezüglich (4.2.7) erfüllen.

Nach [35], Theorem IV.5.2 ist unter diesen Voraussetzungen Problem II S eindeutig lösbar. Die Lösung liegt in $\mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T)$.

Schließlich besitze (4.2.10) nur die triviale Lösung.

Für $l \geq 6$ sei $e^{(1)} \in \mathcal{C}^{2,0,m}(\bar{\Omega}_T)$ Lösung von

$$\partial_t e^{(1)}(t,x) = ((\mathcal{L} + B)e^{(1)}(t))(x) + \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{4!}\right) \partial_i^4 u(t))(x),$$

$$\text{für alle } (t,x) \in \Omega_T, \qquad (4.2.12)$$

$$\mathcal{X}(\Gamma_T)e^{(1)} = 0 \qquad (4.2.13)$$

$$e^{(1)}(0) = e_0^{(1)}, \qquad (4.2.14)$$

wobei $e_o^{(1)}$ das nach der Methode aus 4.2.5 für $j_o = \left[\frac{l-2}{2}\right]$ zu (4.2.12) passend konstruierte Anfangsdatum sei.

Nach [35], Theorem IV.5.2 existiert $e^{(1)}$ eindeutig in $\mathcal{C}^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T)$.

Für $l \geq 8$ sei $e^{(2)} \in \mathcal{C}^{2,0,m}(\bar{\Omega}_T)$ Lösung von

$$\partial_t e^{(2)}(t,x) = ((\mathcal{L}+B)e^{(2)}(t))(x) + \mathcal{D}(x)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{6!}\partial_i^6 u(t) + \frac{2}{4!}\partial_i^4 e^{(1)}(t)\right)(x)\right) \quad (4.2.15)$$

für alle $(t,x) \in \Omega_T$,

$$\chi(\Gamma_T)e^{(2)} = 0\,, \quad (4.2.16)$$

$$e^{(2)}(0) = e_o^{(2)}\,, \quad (4.2.17)$$

wobei $e_o^{(2)}$ wiederum der nach der Methode aus 4.2.5 für $j_o = \left[\frac{l-4}{2}\right]$ zu (4.2.12) passend konstruierte Anfangswert sei.

Nach [35], Theorem IV.5.2 existiert $e^{(2)}$ eindeutig in $\mathcal{C}^{l-4,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T)$.

In allen anderen Fällen bezeichne $e^{(1)}$ bzw. $e^{(2)}$ die Nullfunktion auf $\bar{\Omega}_T$.

$v_h := u + h^2 e^{(1)} + h^4 e^{(2)}$.

4.2.8 Lemma

Seien $1 \leq k \leq 4$, $\sigma_5 := \min\{l-4+\alpha, 5\}$, $\sigma_6 := \min\{l-4, k-1\}$ und $\Omega_\Lambda := \{(t,x,h) : h \in \Lambda_o,\ (t,x) \in \Omega_{h,T}\}$.

Unter den Voraussetzungen von 4.2.7 gibt es Konstanten $C_{16} - C_{19}$, so daß für $H: \Omega_\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$(t,x,h) \longmapsto H(t,x,h) := \partial_t v_h(t,x) - (\mathcal{L}_{h,k}\chi(\bar{\Omega}_h)v_h(t))(x) - B(x)v_h(t,x) - f(t,x) \quad (4.2.18)$$

die folgenden Abschätzungen für alle $(t,x,h) \in \Omega_1$ gelten.

$$|H(t,x,h)|_\infty \leq \begin{cases} c_{16} h^{\sigma_5} & , \text{ falls } (t,x) \in \dot{\Omega}_{h,T} \\ c_{17} h^{\sigma_6} & , \text{ falls } (t,x) \in \Gamma^x_{h,T} \end{cases} \tag{4.2.19}$$

$$|\partial_t H(t,x,h)|_\infty \leq \begin{cases} c_{18} h^{\sigma_5} & , \text{ falls } (t,x) \in \dot{\Omega}_{h,T} \\ c_{19} h^{\sigma_6} & , \text{ falls } (t,x) \in \Gamma^x_{h,T} . \end{cases} \tag{4.2.20}$$

Beweis:

Der Beweis der ersten Ungleichung verläuft analog zum Beweis von Lemma 4.1.3(i).

Zum Beweis der zweiten Ungleichung bemerken wir, daß aus (4.2.18) folgt:

$$\partial_t H(t,x,h) = \partial_t^2 v_h(t,x) - (\mathcal{L}_{h,k} \chi(\bar{\Omega}_h) \partial_t v_h(t))(x)$$

$$- B(x) \partial_t v_h(t,x) - \partial_t f(t,x).$$

$\partial_t u$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\partial_t(\partial_t u)(t) = (\mathcal{L} + B) \partial_t u(t) + \partial_t f(t), \tag{4.2.21}$$

während $\partial_t e^{(1)}$ bzw. $\partial_t e^{(2)}$ der Gleichung (4.2.12) bzw. (4.2.15) mit u bzw. u und $e^{(1)}$ ersetzt durch $\partial_t u$ bzw. $\partial_t u$ und $\partial_t e^{(1)}$ genügt. Damit läßt sich der Beweis der zweiten Ungleichung auf den der ersten zurückführen. Die hinreichende Glattheit der beteiligten Funktionen ist dabei durch die Voraussetzungen gesichert.

§5 Eine Abschätzung

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des für das weitere zentralen Satzes 5.0.2. Wir machen dazu die folgenden Voraussetzungen:

5.0.1 Voraussetzungen

Es seien $\varrho_o > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\Gamma \in C^{2,\alpha}$ und $\lambda_h(\Gamma_h) \to 0$ $(h \to 0)$. Für $h \in \Lambda_o$, $u,v \in H^m(\mathring{\Omega}_h)$ seien

$\bar{K}(u,\varrho_o,h)$, $\mathcal{W}_h(u,\varrho_o)$ wie in 4.1.1

$B : \bar{\Omega} \to M(m,\mathbb{R})$, $x \mapsto B(x)$, stetig

$\mathfrak{L}_h : \mathcal{W}_h(u,\varrho_o) \to M(m,\mathbb{R})$, $(x,v) \to \mathfrak{L}_h(x,v)$

$B_h(v) : \mathring{\Omega}_h \mapsto M(m,\mathbb{R})$, $x \to B_h(v)(x) := \mathfrak{L}_h(x,v(x))$

$B_h := B_h(u)$

$C_{2O} := \sup\{|B(x)|_\infty : x \in \bar{\Omega}\}$.

Es gelte $B_h(x) = B(x)$ für alle $h \in \Lambda_o$ und alle $x \in \mathring{\Omega}_h$.

Ferner gebe es eine Funktion $c \in C([0,\varrho_o])$ mit $c(0) = 0$ und

$$c(\varrho) \geq \sup\{|B_h(x,v) - B_h(x,u)|_\infty : x \in \mathring{\Omega}_h, |v-u|_{h,\infty,m} \leq \varrho\}$$

für $0 \leq \varrho \leq \varrho_o$ und $h \in \Lambda_o$.

Die von B bzw. $B_h(v)$ auf $L^{2,m}(\Omega)$ bzw. $H_2^m(\Omega_h)$ erzeugten Multiplikationsoperatoren werden ebenfalls mit B bzw. $B_h(v)$ bezeichnet.

Schließlich wollen wir annehmen, daß das Problem

$$-(\mathfrak{L}+B)w = 0 \quad \text{auf } \Omega \tag{5.0.1}$$

$$\chi(\Gamma)w = 0 \tag{5.0.2}$$

nur die triviale Lösung $w = 0$ besitzt.

5.0.2 Satz

Es gelten die in 5.0.1 gemachten Voraussetzungen.

Dann gibt es Konstanten C_{21}, $C_{22} > 0$ und $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ und alle $v_h \in \bar{K}(u, C_{21}, h)$ gilt:

$$\left| \left(\mathcal{L}^{o\,o}_{h,k} + B^{o\,o}_{h}(v_h) \right)^{-1} \right|_{h,2,m} \leq C_{22} \qquad (5.0.3)$$

5.1 Approximationsreguläre Operatoren

Dieser Abschnitt enthält eine kurze Zusammenfassung der Theorie approximationsregulärer Operatoren, soweit sie für das folgende benötigt wird. 5.1.1 - 5.1.10 sind dabei im wesentlichen aus [27], [28] übernommen.

5.1.1 Definition

Seien $(E, |\cdot|_E)$, $(E_h, |\cdot|_{E,h})$, $h \in \Lambda_o$, Banachräume über $\mathbb{K}$, $R_h : E \to E_h$, $h \in \Lambda_o$.

Die Paare (E_h, R_h), $h \in \Lambda_o$, bilden eine diskrete Approximation $\mathcal{A}(E, E_h, R_h, \Lambda_o)$ von E, falls gilt:

(i) $|R_h u|_{E,h} \longrightarrow |u|_E$ $(h \to 0)$ für alle $u \in E$

(ii) $|\alpha R_h u + \beta R_h v - R_h(\alpha u + \beta v)|_{E,h} \longrightarrow 0$ $(h \to 0)$
für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und alle $u, v \in E$.

Der Operator R_h heißt Restriktionsoperator von E nach E_h, $R_h u$ die Restriktion von u auf E_h, $u \in E$.

Im folgenden seien $\mathcal{A}(E, E_h, R_h, \Lambda_o)$ bzw. $\mathcal{A}(F, F_h, R_h, \Lambda_o)$ diskrete Approximationen von Banachräumen E bzw. F. In beiden Fällen werden die Restriktionsoperatoren mit R_h bezeichnet. Aus dem Zusammenhang wird stets klar werden, welcher Operator gemeint ist.

5.1.2 Definition

(i) Seien $u \in E$, $u_h \in E_h$, $h \in \Lambda_o$.

Die Folge (u_h) konvergiert diskret gegen u ($u_h \xrightarrow{d} u$ $(h \to 0)$) genau dann, wenn $|u_h - R_h u|_{E,h} \to 0$ $(h \to 0)$.

(ii) Seien $L \in L(E,F)$, $L_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$.

Die Folge (L_h) konvergiert diskret gegen L ($L_h \xrightarrow{d} L$ $(h \to 0)$) genau dann, wenn für alle $u \in D(L)$, $u_h \in D(L_h)$, $h \in \Lambda_o$ mit $u_h \xrightarrow{d} u$ $(h \to 0)$ die Folge $(L_h u_h)$ diskret gegen Lu konvergiert.

5.1.3 Definition

Die Folge (L_h), $L_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$ genügt der inversen Stabilitätsbedingung (b_{-1}) genau dann, wenn es Konstanten $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ und $i_o \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ und alle $u_h \in D(L_h)$ gilt:

$$\gamma\, |u_h|_{E,h} \leq |L_h u_h|_{F,h} .$$

5.1.4 Definition

(i) Sei $L \in L(E,F)$. Ein linearer Teilraum $\Phi \subset D(L)$ heißt Definitionskern von L genau dann, wenn es für alle $u \in D(L)$ eine gegen u konvergierende Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in Φ gibt, so daß $Lu_j \to Lu$ $(j \to \infty)$.

(ii) Seien $L \in L(E,F)$, $L_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$. Dann heißt L, (L_h) G-konsistent genau dann, wenn es einen Definitionskern Φ von L gibt, so daß für alle $u \in \Phi$ eine Folge (u_h), $u_h \in D(L_h)$, $h \in \Lambda_o$ existiert mit $u_h \xrightarrow{d} u$, $L_h u_h \xrightarrow{d} Lu$ $(h \to 0)$.

5.1.5 Lemma [27]:

Seien L, (L_h) G-konsistent.

Dann gibt es für alle $u \in D(L)$ eine Folge (u_h), $u_h \in D(L_h)$, $h \in \Lambda_o$ mit $u_h \xrightarrow{d} u$, $L_h u_h \xrightarrow{d} Lu$ $(h \to 0)$.

5.1.6 Definition

Seien $L \in L(E,F)$, $L_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$.
$L,(L_h)$ heißt approximationsregulär (a-regulär), falls für jede Teilfolge Λ' von Λ_o und jede beschränkte Folge von Elementen $u_h \in D(L_h)$, $h \in \Lambda'$, die folgende Aussage gilt:

Konvergiert $L_h u_h \xrightarrow{d} v \in F$ $(h \to 0, h \in \Lambda')$, so existiert ein $u \in D(L)$ und eine Teilfolge Λ'' von Λ' mit $u_h \xrightarrow{d} u$ $(h \to 0, h \in \Lambda'')$ und $Lu = v$.

5.1.7 Lemma [27]:

Seien $L \in L(E,F)$, $L_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$.

(i) Ist L surjektiv, erfüllt (L_h) die inverse Stabilitätsbedingung (b_{-1}) und sind L, (L_h) G-konsistent, dann ist L injektiv und L, (L_h) a-regulär.

Gibt es ein $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ L_h genau dann injektiv ist, wenn es surjektiv ist, so gilt auch die Umkehrung.

(ii) Ist L injektiv und L, (L_h) a-regulär, so erfüllt (L_h) die inverse Stabilitätsbedingung (b_{-1}).

5.1.8 Definition:

Seien L_h, $B_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$.

(B_h) heißt diskret (L_h)-kompakt, falls es eine Teilfolge $\Lambda'' \subset \Lambda_o$ gibt mit:

(i) $D(L_h) \subset D(B_h)$ für alle $h \in \Lambda''$.

(ii) Sind $u_h \in D(L_h)$ mit $|u_h|_{E,h} \leq C$, $|L_h u_h|_{F,h} \leq C$ für alle $h \in \Lambda''$ mit einer geeigneten Konstanten C, so gibt es eine Teilfolge $\Lambda''' \subset \Lambda''$ und ein $v \in F$, so daß $B_h u_h \xrightarrow{d} v$ $(h \to 0, h \in \Lambda''')$.

5.1.9 Definition

Seien L, $B \in L(E,F)$, L_h, $B_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$.

B, (B_h) heißt diskret L, (L_h) - konvergent, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $D(L) \subset D(B)$, $D(L_h) \subset D(B_h)$, $h \in \Lambda_o$.

(ii) Ist Λ' Teilfolge von Λ_o, $u_h \in D(L_h)$, $h \in \Lambda'$ und $u \in D(L)$ mit $u_h \xrightarrow{d} u$, $L_h u_h \xrightarrow{d} Lu$ $(h \to 0, h \in \Lambda')$, dann gilt $B_h u_h \xrightarrow{d} Bu$ $(h \to 0, h \in \Lambda')$.

5.1.10 Lemma [28]

Seien L, $B \in L(E,F)$, L_h, $B_h \in L(E_h,F_h)$, $h \in \Lambda_o$, L, (L_h) a-regulär, (B_h) diskret (L_h)-kompakt und B, (B_h) diskret L, (L_h)-konvergent.

Dann ist für alle $0 \neq \chi \in \mathbb{K}$ auch $(\chi L + B)$, $((\chi L_h + B_h))$ a-regulär.

Sei $p: E^m \to \mathbb{R}^m$, $u = (u_1,\dots,u_m)^T \mapsto p(u) := (|u_1|_E,\dots,|u_m|_E)^T$.
Durch $|u|_{E,q,m} := |p(u)|_q$ wird für $1 \leq q \leq \infty$ eine Norm auf E^m definiert, die diesen zu einem Banachraum macht. Für $1 \leq q \leq \infty$ sind alle so definierten Normen äquivalent.

Es gilt offensichtlich das folgende Lemma:

5.1.11 Lemma

Sei $\mathcal{A}(E,E_h,R_h,\Lambda_o)$ eine diskrete Approximation von E, $1 \leq q \leq \infty$ und E^m bzw. E_h^m versehen mit der Norm $|\cdot|_{E,q,m}$ bzw. $|\cdot|_{E,h,q,m}$.
Für $h \in \Lambda_o$ sei $R_h^m: E^m \to E_h^m$, $(u_1,\dots,u_m)^T \mapsto (R_h u_1,\dots,R_h u_m)^T$.

Dann ist $\mathcal{A}(E^m,E_h^m,R_h^m,\Lambda_o)$ eine diskrete Approximation von E^m.

5.2 Eine diskrete Approximation von $L^2(\Omega)$

Im folgenden werden für $h \in \Lambda_o$ Restriktionsoperatoren $R_h: L^2(\Omega) \longrightarrow H_2(\dot{\Omega}_h)$ konstruiert, die $\mathcal{A}(L^2(\Omega), H_2(\dot{\Omega}_h), R_h, \Lambda_o)$ zu einer diskreten Approximation von $L^2(\Omega)$ machen.

Für $h \in \Lambda_o$ sei $Q_h := \{ x \in \mathbb{R}^n : -\pi h^{-1} < x_i < \pi h^{-1} \}$ ein offenes Quadrat und

$$F_h: H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),\ u \longmapsto F_h u \quad \text{mit}$$

$$(F_h u)(y) := \begin{cases} h^n (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \sum_{x \in \mathbb{R}_h^n} u(x)\, e^{ix^T y}, & \text{falls } y \in Q_h, \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

die "diskrete" inverse Fouriertransformation mit auf Q_h eingeschränktem Bild.

Nach [66], (2.1.6) gilt:

5.2.1 Lemma

Für festes $h \in \Lambda_o$ ist F_h eine bijektive Isometrie.

Die Fouriertransformation $F: L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist nach dem Satz von Fourier-Plancherel (vgl. [54]) eine bijektive Isometrie auf $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Für $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit kompaktem Träger gilt ferner (vgl. [4], Lemma 49.1) $Fu \in W^{l,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ für alle $l \in \mathbb{N}$, also insbesondere $Fu \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ für alle $l \in \mathbb{N}$ nach dem Sobolewschen Einbettungssatz ([1], p.97).

Für $h \in \Lambda_o$ sei $I_h: H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),\ u \longmapsto I_h u := F F_h u$.

Es gilt der folgende "Interpolationssatz":

5.2.2 Satz [66]

Seien $h \in \Lambda_o$, $l \in \mathbb{N}$.

I_h ist ein linearer, isometrischer Operator von $H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{C})$ in den Teilraum $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ von $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Für jedes $u \in H_2(\mathbb{R}_h^n, \mathbb{C})$ gilt $\chi(\mathbb{R}_h^n) I_h u = u$.

5.2.3 Lemma ([66], (3.2.1))

Für $u \in \hat{C}(\bar{\Omega}, C)$ gilt $| I_h \chi(\mathbb{R}_h^n) u - u |_{L,2} \to 0 \ (h \to 0)$.

Für $h \in \Lambda_o$ seien:

$$R_h^{\mathbb{C}}: L^2(\Omega, \mathbb{C}) \to H_2(\dot{\Omega}_h, \mathbb{C}),$$
$$u \mapsto R_h^{\mathbb{C}} u := \chi(\dot{\Omega}_h) F \chi(Q_h) F^{-1} u$$

$$R_{h,R}^{\mathbb{C}}: L^2(\Omega, \mathbb{C}) \to H_2(\dot{\Omega}_h), \ u \mapsto \mathrm{Re}\ R_h^{\mathbb{C}} u$$

$$R_h: L^2(\Omega) \to H_2(\dot{\Omega}_h), \ u \mapsto R_{h,R}^{\mathbb{C}} u$$

$R_h^{\mathbb{C}}$ ist in folgendem Sinne eine Linksinverse zu I_h:

5.2.4 Lemma

Seien $h \in \Lambda_o$ und $u \in H_2(\dot{\Omega}_h, \mathbb{C})$.

Dann gilt $R_h^{\mathbb{C}} I_h u = u$.

Ist $u \in H_2(\dot{\Omega}_h)$, so gilt sogar $R_{h,R}^{\mathbb{C}} I_h u = u$.

Beweis

Es genügt die erste Behauptung zu beweisen.
Seien dazu $h \in \Lambda_o$ und $u \in H_2(\dot{\Omega}_h, \mathbb{C})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} R_h^{\mathbb{C}} I_h u &= \chi(\dot{\Omega}_h) F \chi(Q_h) F^{-1} F F_h u \\ &= \chi(\dot{\Omega}_h) F F_h u \\ &= \chi(\dot{\Omega}_h) I_h u = u \end{aligned}$$

nach Satz 5.2.2

5.2.5 Lemma:

Seien $u \in L^2(\Omega)$, $u_h \in H_2(\mathring{\Omega}_h)$, $h \in \Lambda_o$, mit

$$|I_h u_h - u|_{L,2} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).$$

Dann gilt: $|u_h - R_h u|_{h,2} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$

Beweis:

Seien $\varepsilon > 0$ und $\bar{u}_h := \chi(\Omega_h) F^{-1}(I_h u_h - u)$ für $h \in \Lambda_o$.
Wähle $i_o \in \mathbb{N}$ so, daß $|I_h u_h - u|_{L,2} < \varepsilon$ für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$.
Sei $h \in \Lambda_o(i_o)$. Wegen der Isometrie von F^{-1} gilt $|\bar{u}_h|_{L,2} < \varepsilon$.

Mit Lemma 5.2.1 und Satz 5.2.2 folgt hieraus:

$$\varepsilon > |F_h^{-1}\bar{u}_h|_{h,2} = |\chi(\mathbb{R}_h^n) I_h F_h^{-1}\bar{u}_h|_{h,2}$$
$$= |\chi(\mathbb{R}_h^n) F\bar{u}_h|_{h,2}.$$

Damit gilt nach Lemma 5.2.4 wegen $u_h \in H_2(\mathring{\Omega}_h)$:

$$|u_h - R_h u|_{h,2} \leq |u_h - R_h^{\mathbb{C}} u|_{h,2} = |R_h^{\mathbb{C}}(I_h u_h - u)|_{h,2}$$
$$\leq |\chi(\mathring{\Omega}_h) F\bar{u}_h|_{h,2} .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt daraus die Behauptung.

5.2.6 Lemma:

Sei $u \in \hat{C}(\bar{\Omega})$, $u_h := \chi(\mathring{\Omega}_h) u$, $h \in \Lambda_o$.

Dann gilt: $|u_h - R_h u|_{h,2} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$

Beweis:

Nach Lemma 5.2.3 gilt wegen Trg $u \subset \bar{\Omega}$:

$$|I_h \chi(\bar{\bar{\Omega}}_h) u - u|_{L,2} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).$$

wobei $\bar{\bar{\Omega}}_h := \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}_h^n$.

Seien $\varepsilon > 0$, $\bar{u}_h := \chi(\Omega_h)F^{-1}(I_h \chi(\bar{\bar{\Omega}}_h)u - u)$ für $h \in \Lambda_o$. Wähle $i_o \in \mathbb{N}$ so, daß $|I_h \chi(\bar{\bar{\Omega}}_h)u - u|_{L,2} < \varepsilon$ für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$. Für $h \in \Lambda_o(i_o)$ ist dann $|\bar{u}_h|_{L,2} < \varepsilon$ wegen der Isometrie von F.

Dies impliziert sofort $|\mathrm{Re}\, \chi(\mathring{\Omega}_h)F\bar{u}_h|_{h,2} < \varepsilon$.

Nach der letzten Behauptung von Satz 5.2.2 gilt:

Wegen $\mathrm{Re}\, \chi(\mathring{\Omega}_h)F\, \chi(\Omega_h)F^{-1}I_h \chi(\bar{\bar{\Omega}}_h)u$

$$= \mathrm{Re}\, \chi(\mathring{\Omega}_h)F\, \chi(\Omega_h)F^{-1}FF_h \chi(\bar{\bar{\Omega}}_h)u$$

$$= \mathrm{Re}\, \chi(\mathring{\Omega}_h)I_h \chi(\bar{\bar{\Omega}}_h)u = \chi(\mathring{\Omega}_h)u\ .$$

Zusammen mit $\mathrm{Re}\, \chi(\mathring{\Omega}_h)F\, \chi(\Omega_h)F^{-1}u = R_h u$

folgt daraus $|u_h - R_h u|_{h,2} < \varepsilon$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt daraus die Behauptung.

5.2.7 Lemma:

$\mathcal{A}(L^2(\Omega), H_2(\mathring{\Omega}_h), R_h, \Lambda_o)$ ist eine diskrete Approximation von $L^2(\Omega)$, falls $\lambda_h(\Gamma_h) \to 0 \quad (h \to 0)$.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 5.5.1 erfüllt sind.

(i): Es ist zu zeigen: Für alle $u \in L^2(\Omega)$ gilt

$$|R_h u|_{h,2} - |u|_{L,2} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Seien $u \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: Es gibt ein $i_o \in \mathbb{N}$, so daß $|I_h R_h u - u|_{L,2} < \varepsilon$ für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt daraus (i), da

$$\big||R_h u|_{h,2} - |u|_{L,2}\big| = \big||I_h R_h u|_{L,2} - |u|_{L,2}\big|$$

$$\leq |I_h R_h u - u|_{L,2}\ .$$

Sei $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $|u - \tilde{u}|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{5}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&|I_h R_h u - u|_{L,2} \\
&\quad \leq |I_h R_h (u - \tilde{u})|_{L,2} + |I_h (R_h \tilde{u} - \chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u})|_{L,2} \\
&\qquad + |I_h (\chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u} - \chi(\Omega_h)\tilde{u})|_{L,2} \\
&\qquad + |I_h \chi(\Omega_h)\tilde{u} - \tilde{u}|_{L,2} + |\tilde{u} - u|_{L,2} \,. \qquad (5.2.1)
\end{aligned}$$

Wir wählen $i_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $h \in \Lambda_0(i_0)$ die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
&|R_h \tilde{u} - \chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u}|_{h,2} < \frac{\varepsilon}{5} \,, \\
&\lambda_h(\Gamma_h^x)\, |\chi(\Omega)\tilde{u}|_C < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{und} \\
&|I_h \chi(\mathbb{R}_h^n)\tilde{u} - \tilde{u}|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{5} \,.
\end{aligned}$$

Wegen $\lambda_h(\Gamma_h^x) \leq n\lambda_h(\Gamma_h)$, $\lambda_h(\Gamma_h) \longrightarrow 0$ $(h \longrightarrow 0)$, Lemma 5.2.6 und Lemma 5.2.3 existiert stets ein geeigenetes i_0.

Sei $h \in \Lambda_0(i_0)$.

Mit Lemma 5.2.1 und Satz 5.2.2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|I_h R_h (u - \tilde{u})|_{L,2} &= |R_h (u - \tilde{u})|_{h,2} \\
&= |\chi(\dot{\Omega}_h) F \chi(Q_h) F^{-1} (u - \tilde{u})|_{h,2} \\
&\leq |\chi(\mathbb{R}_h^n) I_h F_h^{-1} \chi(Q_h) F^{-1} (u - \tilde{u})|_{h,2} \\
&= |F_h^{-1} \chi(Q_h) F^{-1} (u - \tilde{u})|_{h,2} \\
&\leq |F^{-1}(u - \tilde{u})|_{L,2} \\
&= |u - \tilde{u}|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{5} \qquad (5.2.2)
\end{aligned}$$

Nach Wahl von i_0 gilt:

$$\begin{aligned}
&|I_h (R_h \tilde{u} - \chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u})|_{L,2} \\
&\qquad = |R_h \tilde{u} - \chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u}|_{h,2} < \frac{\varepsilon}{5} \qquad (5.2.3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|I_h\, \chi(\mathring{\Omega}_h)\tilde{u} - I_h\, \chi(\Omega_h)\,\tilde{u}|_{L,2} \\
&\quad = |\chi(\mathring{\Omega}_h)\tilde{u} - \chi(\Omega_h)\tilde{u}|_{h,2} \\
&\quad \leq \lambda_h(\Gamma_h^x)\,|\chi(\Omega)\,\tilde{u}|_C < \frac{\varepsilon}{5}
\end{aligned}
\tag{5.2.4}
$$

$$
|I_h\, \chi(\Omega_h)\tilde{u} - \tilde{u}|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{5} \tag{5.2.5}
$$

Nach Wahl von $\tilde{u}$ folgt aus (5.2.1) - (5.2.5):

$$|I_h R_h u - u|_{L,2} < \varepsilon\ .$$

Damit ist (i) bewiesen.

Die Bedingung (ii) aus Definition 5.1.1 ist wegen der Linearität von R_h offensichtlich erfüllt.

5.2.8 Bemerkungen:

(i) Sei $u \in \hat{C}(\bar{\Omega})$. Dann gilt $|\chi(\mathring{\Omega}_h)u - R_h u|_{h,2} \longrightarrow 0$ $(h \longrightarrow 0)$.

(ii) Die Bedingung $\lambda_h(\Gamma_h) \longrightarrow 0$ $(h \longrightarrow 0)$ bedeutet für hinreichend glattes Γ, daß das diskrete Maß des diskreten Randes gegen das Maß des Randes strebt.

5.2.9 Korollar

$\mathcal{A}(L^{2,m}(\Omega), H_2^m(\mathring{\Omega}_h), R_h^m, \Lambda_o)$ ist eine diskrete Approximation von $L^{2,m}(\Omega)$, falls $\lambda_h(\Gamma_h) \longrightarrow 0$ $(h \longrightarrow 0)$.

Seien $B\colon \bar{\Omega} \longrightarrow M(m,\mathbb{R})$, $x \longmapsto B(x)$ stetig,

$\tilde{B}\colon L^{2,m}(\Omega) \longrightarrow L^{2,m}(\Omega)$, $u \longmapsto \tilde{B}u$,

$(\tilde{B}u)(x) := B(x)u(x)$, $x \in \Omega$

$\tilde{B}_h\colon H_2^m(\mathring{\Omega}_h) \longrightarrow H_2^m(\mathring{\Omega}_h)$, $u \longmapsto \tilde{B}_h u$,

$(\tilde{B}_h u)(x) := B(x)u(x)$, $x \in \mathring{\Omega}_h$, $h \in \Lambda_o$ und

$u \in L^2(\Omega)$, $u_h \in H_2^m(\mathring{\Omega}_h)$, $h \in \Lambda_o$.

5.2.10 Lemma:

Aus $u_h \xrightarrow{d} u$ $(h \to 0)$ bezüglich $\mathcal{A}(L^{2,m}(\Omega), H_2^m(\dot{\Omega}_h), R_h^m, \Lambda_o)$ folgt $\tilde{B}_h u_h \xrightarrow{d} \tilde{B}u$ $(h \to 0)$ bezüglich $\mathcal{A}(L^{2,m}(\Omega), H_2^m(\dot{\Omega}_h), R_h^m, \Lambda_o)$.

Insbesondere gilt: $\tilde{B}_h \xrightarrow{d} \tilde{B}$ $(h \to 0)$ im Sinne der genannten diskreten Approximation.

Beweis:

Da B stetig ist, gibt es eine Konstante $\tilde{C}_1 > 0$, so daß $|B(x)|_\infty \leq \tilde{C}_1$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.

Seien $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon \cdot (5\tilde{C}_1\sqrt{m} + 2)^{-1}$.

Da $C_o^{\infty,0,m}(\Omega)$ dicht in $L^{2,m}(\Omega)$ liegt, gibt es ein $\tilde{u} \in C_o^{\infty,0,m}(\Omega)$ mit $|\tilde{u} - u|_{L,2,m} < \delta$.

Wähle $i_o \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ gilt:

$$|u_h - R_h^m u|_{h,2,m} < \delta \qquad \text{(Voraussetzung)}$$

$$|R_h^m(u - \tilde{u})|_{h,2,m} < 2\delta \qquad \text{(Lemma 5.2.9)}$$

$$|R_h^m\tilde{u} - \chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u}|_{h,2,m} < \delta \qquad \text{(Lemma 5.2.6)}$$

$$|R_h^m\tilde{B}(\tilde{u} - u)|_{h,2,m} < \delta + |\tilde{B}(\tilde{u} - u)|_{L,2,m} \qquad \text{(Lemma 5.2.9)}$$

$$|\chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{B}\tilde{u} - R_h^m\tilde{B}\tilde{u}|_{h,2,m} < \delta. \qquad \text{(Lemma 5.2.6)}$$

Ein solches i_o existiert stets aus den hinter den einzelnen Ungleichungen angegebenen Gründen.

Die Dreiecksgleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
&|\tilde{B}_h u_h - R_h^m\tilde{B}u|_{h,2,m} \\
&\leq |\tilde{B}_h(u_h - \chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u})|_{h,2,m} + |\tilde{B}_h\chi(\dot{\Omega}_h)\tilde{u} - R_h^m\tilde{B}\tilde{u}|_{h,2,m} \\
&\quad + |R_h^m\tilde{B}(\tilde{u} - u)|_{h,2,m} \qquad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Nach Wahl von i_o erhält man mit $s_h := u_h - \chi(\mathring{\Omega}_h)\tilde{u}$:

$$|\tilde{B}_h s_h|_{h,2,m} = \left(h^n \cdot \max\left\{ \sum_{x \in \mathring{\Omega}_h} |(B(x)s_h(x))_j|^2 : 1 \le j \le m \right\}\right)^{1/2}$$

$$\le \left(h^n \tilde{C}_1^2 \cdot \sum_{x \in \mathring{\Omega}_h} |s_h(x)|_2^2\right)^{1/2}$$

$$\le \tilde{C}_1 \sqrt{m} |s_h|_{h,2,m}$$

$$\le \tilde{C}_1 \sqrt{m} \left[|u_h - R_h^m u|_{h,2,m} + |R_h^m(u - \tilde{u})|_{h,2,m} \right.$$

$$\left. + |R_h^m \tilde{u} - \chi(\mathring{\Omega}_h)\tilde{u}|_{h,2,m} \right]$$

$$\le \tilde{C}_1 \sqrt{m} \left[\delta + 2\delta + \delta \right] = 4\tilde{C}_1 \sqrt{m}\, \delta . \qquad (5.2.7)$$

$$|\tilde{B}_h \chi(\mathring{\Omega}_h)\tilde{u} - R_h^m \tilde{B}\tilde{u}|_{h,2,m}$$

$$= |\chi(\mathring{\Omega}_h)\tilde{B}\tilde{u} - R_h^m \tilde{B}\tilde{u}|_{h,2,m} < \delta . \qquad (5.2.8)$$

$$|R_h^m \tilde{B}(\tilde{u} - u)|_{h,2,m}$$

$$< \delta + |\tilde{B}(\tilde{u} - u)|_{L,2,m}$$

$$\le \delta \cdot (1 + \tilde{C}_1 \sqrt{m}) \qquad (5.2.9)$$

Einsetzen von (5.2.7) - (5.2.9) in (5.2.6) ergibt:

$$|\tilde{B}_h u_h - R_h^m \tilde{B}u|_{h,2,m} < \delta (2 + 5\tilde{C}_1 \sqrt{m}) = \varepsilon .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

5.3 Die inverse Stabilität von $\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}$ bezüglich der diskreten L_2-Norm

In diesem Abschnitt zeigen wir das folgende, im Beweis von Satz 5.0.2 benötigte Lemma.

5.3.1 Lemma

Es gilt:

(i) $\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}$ ist invertierbar.

(ii) Es gibt eine Konstante $C_{23} > 0$, so daß für alle $h \in \Lambda_o$ gilt:

$$|(\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k})^{-1}|_{h,2} \leq C_{23}.$$

Ein Beweis der ersten Behauptung des obigen Lemmas findet sich in [23] . Eine zu (ii) analoge Behauptung wird dort bezüglich der Norm $|\cdot|_{h,\infty}$ bewiesen. Wir benutzen hier im wesentlichen eine Beweisidee von Pereyra et al.[52] (vgl. [45]).

Der Operator $\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}$ entspricht für $x \in \mathring{\Omega}_h$ der bekannten $(2n+1)$-Punkte-Approximation des Laplace-Operators mit auf Γ^x_h verschwindenden Randwerten. Damit läßt sich $\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}$ analog zu [45], Abschnitt 2.5 folgendermaßen darstellen:

Für $x \in \mathring{\Omega}_h$, $1 \leq i \leq n$ und $h \in \Lambda_o$ seien

$$j_-(x,i,h) := \min\{j \in \mathbb{Z} : x + \gamma h e_i \in \Omega,\ x + \gamma \chi(\mathbb{Z},\gamma) h e_i \in \mathring{\Omega}_h \text{ für } j \leq \gamma \leq 0\}$$

$$j_+(x,i,h) := \max\{j \in \mathbb{Z} : x + \gamma h e_i \in \Omega,\ x + \gamma \chi(\mathbb{Z},\gamma) h e_i \in \mathring{\Omega}_h \text{ für } 0 \leq \gamma \leq j\}.$$

Dann ist der diskrete Gitterlinienabschnitt G(x,i,h) durch x in $\dot{\Omega}_h$ in Richtung der i-ten Koordinatenachse gegeben durch

$$G(x,i,h) := \left\{ y \in \dot{\Omega}_h : y = x + jhe_i,\ j_-(x,i,h) \leq j \leq j_+(x,i,h) \right\} \tag{5.3.1}$$

Für $x,y \in \dot{\Omega}_h$ gilt entweder $G(x,i,h) = G(y,i,h)$ oder $G(x,i,h) \cap G(y,i,h) = \emptyset$.

Sei $n_{h,i}$ die Anzahl der paarweise verschiedenen diskreten Gitterlinienabschnitte in $\dot{\Omega}_h$ in Richtung der i-ten Koordinatenachse. Die 3-Punkte-Approximation D_i^2 von ∂_i^2 längs des j_o-ten diskreten Gitterlinienabschnitts in $\dot{\Omega}_h$ in Richtung der i-ten Koordinatenachse ist dann bei Anordnung der Punkte nach steigendem j in (5.3.1) von der Form:

$$h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} =: h^{-2} A_{j_o,i,h} \tag{5.3.2}$$

Der 3-Punkte-Approximation D_i^2 von ∂_i^2 auf ganz $\dot{\Omega}_h$ entspricht dann die direkte Summe $h^{-2} A_{i,h} := \sum_{j_o=1}^{n_{h,i}} \oplus\, A_{j_o,i,h}$.

Durch Transformation mit geeigneten Permutationsmatrizen P_i kann schließlich die Anordnung der Punkte von $\dot{\Omega}_h$ auf eine für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ einheitliche Form gebracht werden. Man erhält dann für die Matrixdarstellung von $\Delta_{h,k}^{o\,o}$:

$$\Delta_{h,k}^{o\,o} = h^{-2} A := h^{-2} \sum_{i=1}^{n} P_i A_{i,h} P_i^T \tag{5.3.3}$$

Die folgenden beiden Lemmata gestatten es, den Beweis von Lemma 5.3.1 auf geeignete Abschätzungen für die "Elementarmatrizen" $A_{j_o,i,h}$ aus (5.3.2) zurückzuführen.

5.3.2 Lemma([52], [45])

Es gebe eine Konstante $\vartheta > 0$, so daß $\frac{1}{2}(A + A^T) \leq -\vartheta I$, wobei I die Matrixdarstellung der Identität auf $H_2(\mathring{\Omega}_h)$ bezeichnet.

Dann existiert $(\Delta^{o\,o}_{h,k})^{-1}$ und es gilt $|(\Delta^{o\,o}_{h,k})^{-1}|_{h,2} = h^2\vartheta^{-1}$.

Dabei gelte für $j \in \mathbb{N}$ und zwei symmetrische Matrizen $B_1, B_2 \in M(j,\mathbb{R})$ $B_1 \leq B_2 :\Leftrightarrow x^T B_1 x = x^T B_2 x$ für alle $x \in \mathbb{R}^j$.

5.3.3 Lemma ([52],[45])

(i) Seien $j \in \mathbb{N}$, $\vartheta > 0$ und $B, P \in M(j,\mathbb{R})$, P Permutationsmatrix.
Dann gilt $B + B^T \leq -\vartheta I \iff P(B + B^T)P^T \leq -\vartheta I$.

(ii) Seien ν_o, $j_\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq \nu_o$, $\vartheta > 0$ und $B_\nu \in M(j_\nu,\mathbb{R})$
mit mit $B_\nu + B_\nu^T \leq -\vartheta I$ für $1 \leq \nu \leq \nu_o$.
Dann gilt für $B := \sum_{\nu=1}^{\nu_o} \oplus B_\nu$: $B + B^T \leq -\vartheta I$.

Dabei bezeichne I stets eine Einheitsmarix geeigneter Dimension.

Die elementaren Beweise dieser Lemmata sind in [45], Abschnitt 3.1 ausführlich dargestellt.

Beweis von Lemma 5.3.1

Sei $A_{j_o,i,h}$ die Matrix aus (5.3.2). Wie man leicht nachrechnet, besitzt $A_{j_o,i,h}$ die Eigenwerte

$$\lambda_\nu = -4 \sin^2 (\nu\pi (2(j_o+1))^{-1}), \quad \nu = 1,\ldots,j_o$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\alpha_\nu = (a_{\nu 1}, \ldots, a_{\nu j_o})^T,$$

$$a_{\mu\nu} = \sin (\mu\nu\pi (j_o+1)^{-1}), \quad \mu,\nu = 1,\ldots,j_o.$$

Wegen $j_o+1 \leq 2\,\mathrm{diam}(\Omega)\,h^{-1}$ und der Symmetrie von $A_{j_o,i,h}$ gilt damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(A_{j_o,i,h}+A^T_{j_o,i,h}\right) &= A_{j_o,i,h}\\ &\leqslant -4\sin^2\left(\pi(2(j_o+1))^{-1}\right) I\\ &\leqslant -4\,(j_o+1)^{-2} I \leqslant -h^2\,\mathrm{diam}^{-2}(\Omega)\, I\,.\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.3.2 und Lemma 5.3.3 folgt daraus die Behauptung.

5.4 Beweis des Satzes

Nach der in den vorangegangenen Abschnitten geleisteten Vorarbeit sind wir nun in der Lage, Satz 5.0.2 zu beweisen. Wir tun dies in einer Reihe von Lemmata.

Die grundlegende Idee ist die folgende:
Wir setzen den Operator Δ in kanonischer Weise zu einem Operator $\bar{\Delta}$ auf $W_0^{2,2}(\Omega)$ fort. Mit Hilfe von Lemma 5.1.7 erhält man die a-Regularität von $\bar{\Delta}$, $(\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k})$ bezüglich $\mathcal{A}(L^2(\Omega), H_2(\mathring{\Omega}_h), R_h, \Lambda_o)$ und daraus mit Lemma 5.4.5 und Lemma 5.1.10 die a-Regularität von $\bar{\mathfrak{L}}+B$, $(\mathfrak{L}^{\circ\,\circ}_{h,k}+B_h)$ bezüglich $\mathcal{A}(L^{2,m}(\Omega), H_2^m(\mathring{\Omega}_h), R_h^m, \Lambda_o)$, wobei $\bar{\mathfrak{L}}$ analog zu $\mathfrak{L}$ mit $\bar{\Delta}$ anstelle von Δ erklärt sei.
Lemma 5.1.7 liefert dann die Behauptung für $v = u$. (5.0.3) folgt daraus mit Hilfe der Dreiecksungleichung.

Es gelten bis zum Ende dieses Abschnitts die Voraussetzungen von Satz 5.0.2.

Sei

$$\bar{\Delta}: W_0^{2,2}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega),\ u \longmapsto \bar{\Delta}u := \lim_{j\to\infty} \Delta u_j\ ,$$

wobei $u_j \in \mathfrak{M}(\Omega)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $u_j \longrightarrow u$ $(j \to \infty)$ in $W^{2,2}(\Omega)$.

$\bar{\Delta}$ ist wohldefiniert.

5.4.1 Lemma

$\bar{\Delta}: W_0^{2,2}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ ist bijektiv.

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus [34], Theorem III.9.1.

5.4.2 Lemma

$\bar{\Delta}$, $(\Delta_{h,k}^{o\,o})$ ist a-regulär bezüglich
$\mathcal{A}(L^2(\Omega), H_2(\mathring{\Omega}_h), R_h, \Lambda_o)$.

Beweis:

Es gilt:

(i) $\bar{\Delta} \in L(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.

(ii) $\bar{\Delta}: W_0^{2,2}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ ist surjektiv.

(iii) $(\Delta_{h,k}^{o\,o})$ erfüllt die inverse Stabilitätsbedingung (b_{-1}).
Dies folgt aus Lemma 5.3.1.

(iv) $\bar{\Delta}$, $(\Delta_{h,k}^{o\,o})$ ist G-konsistent.

Seien dazu $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, $v := \bar{\Delta}u = \Delta u \in C(\Omega)$, $v_h := \chi(\mathring{\Omega}_h)v$,
$u_h := (\Delta_{h,k}^{o\,o})^{-1} \chi(\mathring{\Omega}_h)u$.

Aus [23], Abschnitt 3 folgt $|u_h - \chi(\mathring{\Omega}_h)u|_{h,\infty} \longrightarrow 0$ $(h \longrightarrow 0)$.
Also auch $|u_h - \chi(\mathring{\Omega}_h)u|_{h,2} \longrightarrow 0$ $(h \longrightarrow 0)$.

Nach Lemma 5.2.6 gilt damit:

$$0 \leq |u_h - R_h u|_{h,2}$$
$$\leq |u_h - \chi(\mathring{\Omega}_h)u|_{h,2} + |\chi(\mathring{\Omega}_h)u - R_h u|_{h,2} \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0)$$

und

$$|v_h - R_h v|_{h,2} \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0) .$$

Also ist $\bar{\Delta}$, $(\Delta_{h,k}^{o\,o})$ G-konsistent.

Aus (i) - (iv) folgt mit Lemma 5.1.7 die Behauptung.

5.4.3 Bemerkung

Die aus [23] gefolgerte Behauptung $|u_h - X(\mathring{\Omega}_h)u|_{h,\infty} \longrightarrow 0$ $(h \longrightarrow 0)$ läßt sich auch leicht mit den Methoden und Ergebnissen aus [45] beweisen.

Sei $\bar{\mathfrak{L}}: (W_0^{2,2}(\Omega))^m \longrightarrow L^{2,m}(\Omega)$

$$u = (u_1,\ldots,u_m)^T \longmapsto \bar{\mathfrak{L}}(u) := (d_1\bar{\Delta}u_1,\ldots,d_m\bar{\Delta}u_m)^T.$$

5.4.4 Lemma

$\bar{\mathfrak{L}}$, $(\mathfrak{L}^{\circ\,\circ}_{h,k})$ ist a-regulär bezüglich $\mathcal{A}(L^{2,m}(\Omega), H_2^m(\mathring{\Omega}_h), R_h^m, \Lambda_o)$.

Beweis:

Seien Λ' Teilfolge von Λ_o, $\tilde{C}_1 > 0$, $u_h \in D(\mathfrak{L}^{\circ\,\circ}_{h,k}) = H_2^m(\mathring{\Omega}_h)$ mit $|u_h|_{h,2,m} \leq \tilde{C}_1$ für $h \in \Lambda'$ und $\mathfrak{L}^{\circ\,\circ}_{h,k}u_h \xrightarrow{d} v$ $(h \longrightarrow 0, h \in \Lambda')$ für ein geeignetes $v \in L^{2,m}(\Omega)$.

Zu zeigen bleibt: Es gibt eine Teilfolge Λ'' von Λ' und ein $u \in (W_0^{2,2}(\Omega))^m$, so daß:

(i) $\bar{\mathfrak{L}}u = v$

(ii) $u_h \xrightarrow{d} u$ $(h \longrightarrow 0,\ h \in \Lambda'')$.

Für $1 \leq j \leq m$ gilt offensichtlich:

$$u_{h,j} \in D(\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}) = H_2(\mathring{\Omega}_h)$$

$$|u_{h,j}|_{h,2} \leq \tilde{C}_1 \quad \text{für } h \in \Lambda'$$

$$\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}u_{h,j} \xrightarrow{d} d_j^- v_j \quad (h \longrightarrow 0,\ h \in \Lambda'),$$

wobei $d_j^-: \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto d_j^-(x) := d_j^{-1}(x)$.

Aus der a-Regularität von $\bar{\Delta}$, $(\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k})$ folgt die Existenz einer Teilfolge Λ_1 von Λ' und eines $u_1 \in L^2(\Omega)$ mit $u_{h,1} \xrightarrow{d} u_1$ $(h \longrightarrow 0, h \in \Lambda_1)$ und $\bar{\Delta}u_1 = d_1^- v_1$, d.h. $d_1\bar{\Delta}u_1 = v_1$.

Wiederholung dieser Überlegungen für $j = 2,\ldots,m$ ergibt die Existenz von Teilfolgen $\Lambda_m \subset \Lambda_{m-1} \subset \ldots \subset \Lambda_1 \subset \Lambda'$ und Funktionen $u_j \in L^2(\Omega)$, $1 \leq j \leq m$ mit $u_{h,j} \xrightarrow{d} u_j$ $(h \to 0, h \in \Lambda_j)$ und $d_j \bar{\Delta} u_j = v_j$, $1 \leq j \leq m$.

Für $\Lambda'' := \Lambda_m$ folgt daraus $\bar{\mathfrak{L}} u = v$

und $u_h \xrightarrow{d} u := (u_1,\ldots,u_m)^T$ $(h \to 0,\ h \in \Lambda'')$.

Damit ist das Lemma bewiesen.

5.4.5 Lemma (Diskretes Rellichsches Lemma)

Seien $\bar{\bar{\Omega}}_h := \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^n_h$, $C_{24} > 0$ und $u_h \in H_2(\bar{\bar{\Omega}}_h)$ mit $\|u_h\|_{h,2} \leq C_{24}$ für alle $h \in \Lambda_o$.

Dann gibt es eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ und eine Teilfolge $\Lambda' \subset \Lambda_o$, so daß

$$|I_h u_h - u|_{L,2} \to 0 \quad (h \to 0,\ h \in \Lambda').$$

Beweis:

Unter den gemachten Voraussetzungen existiert nach [66], 3.4 ein $u \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$, $u = u_R + iu_I$, u_R, $u_I \in L^2(\Omega)$ und eine Teilfolge Λ' von Λ_o mit $|I_h u_h - u|_{L,2} \to 0$ $(h \to 0,\ h \in \Lambda')$.

Wir führen die Annahme $u_I \neq 0$ zu einem Widerspruch.

Seien dazu $|u_I|_{L,2} =: \varepsilon > 0$, $\tilde{u}_R$, $\tilde{u}_I \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tilde{u} := \tilde{u}_R + i\tilde{u}_I$

mit $|u_R - \tilde{u}_R|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{6}$, $|u_I - \tilde{u}_I|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{6}$.

Wähle $i_o \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $h \in \Lambda'(i_o)$ gilt:

$$|I_h u_h - u|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{6}, \quad |\tilde{u} - I_h \chi(\Omega_h)\tilde{u}|_{L,2} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Ein solches i_o existiert stets wegen Lemma 5.2.3 und

$|I_h u_h - u|_{L,2} \to 0$ $(h \to 0,\ h \in \Lambda')$

Damit gilt:

$$|I_h u_h - I_h \chi(\Omega_h)\tilde{u}|_{L,2}$$

$$\leq |I_h u_h - u|_{L,2} + |u - \tilde{u}|_{L,2} + |\tilde{u} - I_h \chi(\mathring{\Omega}_h)\tilde{u}|_{L,2} < \frac{2}{3}\varepsilon$$

Wegen der Isometrie von I_h folgt daraus

$$|u_h - \chi(\Omega_h)\tilde{u}|_{h,2} < \frac{2}{3}\varepsilon$$

Also gilt für $h \in \Lambda(i_o)$: $|\chi(\Omega_h)\tilde{u}_I|_{h,2} < \frac{2}{3}\varepsilon$.

Damit ist nach Definition des Lebesgue-Integrals auch $|\tilde{u}_I|_{L,2} < \frac{2}{3}\varepsilon$.

Die Dreiecksungleichung ergibt nun

$$|u_I|_{L,2} = |\tilde{u}_I|_{L,2} + |u_I - \tilde{u}_I|_{L,2} < \frac{5}{6}\varepsilon$$

im Widerspruch zur Annahme.

Also ist $u_I = 0$ und damit $u \in L^2(\Omega)$.

5.4.6 Lemma:

$\bar{\mathfrak{L}} + B$, $(\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k} + B^{\circ\circ}_h)$ ist a-regulär bezüglich $\mathcal{A}(L^{2,m}(\Omega), H^m_2(\mathring{\Omega}_h), R^m_h, \Lambda_o)$.

Beweis:

Es gilt:

(i) $\bar{\mathfrak{L}}$, $(\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k})$ ist a-regulär nach Lemma 5.1.10 .

(ii) $(B^{\circ\circ}_h)$ ist diskret $(\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k})$ - kompakt, denn

α) $D(\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k}) = D(B^{\circ\circ}_h) = H^m_2(\mathring{\Omega}_h)$ für alle $h \in \Lambda_o$

β) Seien $\tilde{C}_1 > 0$, $u_h \in D(\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k})$ mit $|u_h|_{h,2,m} \leq \tilde{C}_1$ und

$|\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k} u_h|_{h,2,m} \leq \tilde{C}_1$ für alle $h \in \Lambda_o$.

Wir zeigen: $B_h^{\circ\,\circ} u_h$ enthält eine diskret konvergente Teilfolge.

Für $1 \leq j \leq m$ und $h \in \Lambda_o$ gilt $|u_{h,j}|_{h,2} \leq \tilde{C}_1$,

$|\Delta_{h,k}^{\circ\,\circ} u_{h,j}|_{h,2} \leq |d_j^-|_C \tilde{C}_1$ und damit

$$\|u_{h,j}\|_{h,2} \leq \tilde{C}_1 \sqrt{1 + |d_j^-|_C}\,.$$

Nach Lemma 5.4.5 existieren Teilfolgen

$\Lambda_m \subset \Lambda_{m-1} \subset \ldots \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_o$ und $u_1, \ldots, u_m \in L^2(\Omega)$ mit

$$|I_h u_{h,j} - u_j|_{L,2} \to 0 \quad (h \to 0, h \in \Lambda_j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Damit gilt nach Lemma 5.2.5 für $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$, $\Lambda' := \Lambda_m$:

$$|u_h - R_h^m u|_{h,2,m} \to 0 \quad (h \to 0, h \in \Lambda').$$

Aus Lemma 5.2.10 folgt damit

$$|B_h u_h - R_h^m B u|_{h,2,m} \to 0 \quad (h \to 0, h \in \Lambda').$$

(iii) B, $(B_h^{\circ\,\circ})$ ist diskret $\bar{\mathfrak{L}}$, $(\mathfrak{L}_{h,k}^{\circ\,\circ})$ - konvergent. Dies folgt sofort aus $D(\bar{\mathfrak{L}}) \subset D(B)$, $D(\mathfrak{L}_{h,k}^{\circ\,\circ}) \subset D(B_h^{\circ\,\circ})$ und Lemma 5.2.10.

(i) - (iii) zusammen mit Lemma 5.1.10 liefert die Behauptung.

Beweis des Satzes 5.0.2

Aus der a-Regularität von $\bar{\mathfrak{L}} + B$, $(\mathfrak{L}_{h,k}^{\circ\,\circ} + B_h^{\circ\,\circ})$ zusammen mit der Injektivität von $\bar{\mathfrak{L}} + B$ folgt nach Lemma 5.1.7 die Existenz von Konstanten $\tilde{C}_2 > 0$, $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ und alle $u_h \in H_2^m(\mathring{\Omega}_h)$ gilt:

$$\tilde{C}_2 |u_h|_{h,2,m} \leq |(\mathfrak{L}_{h,k}^{\circ\,\circ} + B_h^{\circ\,\circ}) u_h|_{h,2,m}. \qquad (5.4.2)$$

Wähle nun $C_{21} > 0$ so, daß $c(C_{21}) \leq \tilde{C}_2 \, (2\sqrt{m})^{-1}$.

Dann gilt für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$, $u_h \in H_2^m(\mathring{\Omega}_h)$ und alle $v_h \in \bar{K}(u, C_{21}, h)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_2 |u_h|_{h,2,m} &\leq \left| \left(\mathcal{L}^{\circ\,\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\,\circ} \right) u_h \right|_{h,2,m} \\
&\leq \left| \left(\mathcal{L}^{\circ\,\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\,\circ}(v_h) \right) u_h \right|_{h,2,m} \\
&\quad + \left| \left(B_h^{\circ\,\circ} + B_h^{\circ\,\circ}(v_h) \right) u_h \right|_{h,2,m} \\
&\leq \left| \left(\mathcal{L}^{\circ\,\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\,\circ}(v_h) \right) u_h \right|_{h,2,m} \\
&\quad + c(C_{21}) \sqrt{m} \, |u_h|_{h,2,m} \\
\frac{\tilde{C}_2}{2} |u_h|_{h,2,m} &\leq \left| \left(\mathcal{L}^{\circ\,\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\,\circ}(v_h) \right) u_h \right|_{h,2,m} .
\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\mathcal{L}^{\circ\,\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\,\circ}(v_h)$ injektiv und damit bijektiv für $h \in \Lambda_o(i_o)$.

Schließlich gilt mit $C_{22} := 2\tilde{C}_2^{-1}$:

$$\left| \left(\mathcal{L}^{\circ\,\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\,\circ}(v_h) \right)^{-1} \right|_{h,2,m} \leq C_{22} \quad .$$

§6 Eine asymptotische Entwicklung für das elliptische Problem

6.1 Einige Lemmata

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Reihe von im wesentlichen technischen Lemmata. 6.1.2 - 6.1.7 sind Verallgemeinerungen entsprechender Ergebnisse aus [45], [46]. Für sich genommen interessant dürfte Lemma 6.1.12 sein, das in [10] ohne Beweis verwendet wird.

Bis zum Ende dieses Abschnitts sei stets $1 \leq k \leq 4$. Ferner wollen wir die Bedingung (V_k) als erfüllt betrachten.

6.1.1 Definition ([13])

Seien $h \in \Lambda_o$ und $M_h \in \{\mathring{\Omega}_h, \Omega_h, \bar{\Omega}_h\}$.

Ein $L_h \in B(H^m(M_h), H^m(M_h))$ heißt invers-monoton, falls für alle $u_h \in H^m(M_h)$ gilt:

$$(L_h u_h)(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in M_h \Rightarrow u_h(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in M_h.$$

Invers-monotone Operatoren sind nicht-singulär.

Der Operator $-\check{\mathfrak{L}}_{h,k}$ aus §3 erlaubt ein diskretes Randmaximumprinzip im folgenden Sinn:

6.1.2 Lemma (vgl. [46], Lemma 3 und Lemma 4)

Seien $h \in \Lambda_o$ und $u_h \in H^m(\bar{\Omega}_h)$ mit $(-\check{\mathfrak{L}}_{h,k} u_h)(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathring{\Omega}_h$.

Dann gilt für alle $x \in \bar{\Omega}_h$ und alle $1 \leq j \leq m$:

$$u_{h,j}(x) \leq \max \left\{ 0, \max \left\{ u_{h,j}(y) : y \in \Gamma_h^x \cup \Gamma_h \right\} \right\}.$$

Insbesondere ist $-\check{\mathfrak{L}}_{h,k}$ invers-monoton und damit nicht-singulär.
Seine Inverse ist gegeben durch

$$\check{\mathfrak{L}}_{h,k}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathfrak{L}_{h,k}^{o\,o})^{-1} & -(\mathfrak{L}_{h,k}^{o\,o})^{-1} \mathfrak{L}_{h,k}^{o\,x} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \qquad (6.1.1)$$

Schließlich gibt es eine Konstante $C_{25} > 0$, mit der für alle $h \in \Lambda_o$ $|\check{\mathfrak{L}}_{h,k}^{-1}|_{h,\infty,m} \leq C_{25}$ gilt.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall $m = 1$ und $d_1 = 1$, d. h. $\check{\mathfrak{L}}_{h,k} = \check{\Delta}_{h,k}$. Da $\mathring{\Omega}_h$ nach Voraussetzung gitterzusammenhängend ist, folgt das diskrete Randmaximumprinzip und damit die Inversmonotonie von $-\check{\Delta}_{h,k}$ sofort aus [12], Theorem 1 und Theorem 3.

Seien nun $x^o \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i - x_i^o > 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ und alle $1 \leq i \leq n$, $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \to v(x) := \exp(|x - x^o|_1)$ und $v_h := \chi(\bar{\Omega}_h) v \in H_\infty(\bar{\Omega}_h)$ für $h \in \Lambda_o$.

Sind $h \in \Lambda_o$ und $x \in \mathring{\Omega}_h$, so erhält man durch Taylorentwicklung um x (vergleiche den Beweis von Lemma 4 in [46]):

$$(-\check{\Delta}_{h,k} v_h)(x) \leq -\exp(|x - x^o|_1) \cdot n < -1 \,. \qquad (6.1.2)$$

Sei $h \in \Lambda_o$. Mit $e_h : \bar{\Omega}_h \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e_h(x) := 1$ und $q_h := -\check{\Delta}_{h,k}^{-1} e_h$ gilt wegen der Inversmonotonie von $-\check{\Delta}_{h,k}$:

$$\left| -\check{\Delta}_{h,k}^{-1} \right|_{h,\infty} \leq \max \left\{ q_h(x) : x \in \bar{\Omega}_h \right\} . \qquad (6.1.3)$$

Für $x \in \Gamma_h^x \cup \Gamma_h$ ist nach (6.1.1) $q_h(x) = 1$.

Für $x \in \mathring{\Omega}_h$ gilt nach (6.1.2) und der Definition von q_h:

$$(-\check{\Delta}_{h,k}(v_h + q_h))(x) < 0. \qquad (6.1.4)$$

Daraus folgt wegen der Gültigkeit des diskreten Randmaximumprinzips:

$$\begin{aligned} q_h(x) + 1 &\leq (v_h + q_h)(x) \\ &\leq \max \left\{ 0, \max \left\{ v_h(y) + q_h(y) : y \in \Gamma_h^x \cup \Gamma_h \right\} \right\} \\ &\leq \max \left\{ v_y(y) : y \in \Gamma_h^x \cup \Gamma_h \right\} + 1 \\ &\leq \max \left\{ \exp \left(|x - x^0|_1 \right) : x \in \Gamma \right\} + 1, \end{aligned}$$

da $v_h(x) > 1$ für alle $x \in \bar{\Omega}_h$ und $q_h(x) = 1$ für $x \in \Gamma_h^x \cup \Gamma_h$.

Mit $\tilde{c}_1 := \max \left\{ \exp \left(|x - x^0|_1 \right) : x \in \Gamma \right\}$ gilt also:

$$\left| \Delta_{h,k}^{-1} \right|_{h,\infty} \leq \tilde{c}_1 . \qquad (6.1.5)$$

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall zurück.

Das diskrete Randmaximumprinzip in der in Lemma 6.1.2 angegebenen Form und damit die Invers-Monotonie von $-\check{\mathcal{L}}_{h,k}^{-1}$ folgt wegen $d_j(x) \geq \underline{d} > 0$ für alle $1 \leq j \leq m$ und alle $x \in \bar{\Omega}$ sofort aus der entsprechenden Eigenschaft von $-\check{\Delta}_{h,k}^{-1}$. (6.1.1) verifiziert man leicht durch Nachrechnen. Eine Abschätzung für $\left| \check{\mathcal{L}}_{h,k}^{-1} \right|_{h,\infty,m}$ schließlich erhält man wie folgt:

Sei für $h \in \Lambda_0$ und $1 \leq j \leq m$:

$$\check{\mathcal{D}}_j : H_\infty(\bar{\Omega}_h) \longrightarrow H_\infty(\bar{\Omega}_h),\ u \longmapsto \check{\mathcal{D}}_j\, u,$$

$$(\check{\mathcal{D}}_j u)(x) := \begin{cases} d_j(x)u(x) & , \text{ falls } x \in \dot{\Omega}_h \\ u(x) & , \text{ falls } x \in \Gamma_h^x \cup \Gamma_h . \end{cases}$$

Dann gilt für $h \in \Lambda_o$ und $u \in H_\infty^m(\bar{\Omega}_h)$:

$$\begin{aligned} |\check{\mathcal{L}}_{h,k} u|_{h,\infty,m} &= \max_{1\le j\le m} |\check{\mathcal{D}}_j \check{\Delta}_{h,k} u_j|_{h,\infty} \\ &\ge \max_{1\le j\le m} \left(\min \left(\min_{x\in\Omega_h} d_j(x),\ 1\right) \cdot |\Delta_{h,k} u_j|_{h,\infty}\right) \\ &\ge \max_{1\le j\le m} \left(\min\left(\underline{d},\ 1\right) \cdot \tilde{C}_1^{-1} |u_j|_{h,\infty}\right) \\ &\ge \min\left(\underline{d},\ 1\right) \cdot \tilde{C}_1^{-1} |u|_{h,\infty,m} . \end{aligned}$$

Mit $C_{25} := \min^{-1}\left(\underline{d},\ 1\right) \cdot \tilde{C}_1$ folgt daraus $|\check{\mathcal{L}}_{h,k}^{-1}|_{h,\infty,m} \le C_{25}$.

Seien h, M_h und L_h wie in 6.1.1. Die "Matrixelemente" von L_h bezeichnen wir mit $L_h(x,y)$, $x, y \in M_h$, d. h. für alle $u \in H_\infty(M_h)$ und alle $x \in M_h$ gilt: $(L_h u)(x) = \sum_{y\in M_h} L_h(x,y)u(y)$. Ist L_h invertierbar, so schreiben wir, um Verwechslungen vorzubeugen, $\bar{L}_h(x,y)$ an Stelle von $L_h^{-1}(x,y)$.

6.1.3 Lemma (vgl. [46], Lemma 6)

Es gibt eine nur von k und n abhängige positive Konstante $C_{26} < 1$, so daß

$$C_{26} \cdot |\Delta_{h,k}(x,x)| \ge \sum_{\substack{y\in\Omega_h \\ y\ne x}} |\Delta_{h,k}(x,y)| \qquad (6.1.6)$$

und

$$|\Delta_{h,k}(x,x)| \ge 2n \cdot h^{-2} \qquad (6.1.7)$$

für alle $h \in \Lambda_o$ und alle $x \in \Gamma_h^x$.

Beweis:

(6.1.7) folgt sofort aus $l_1(0;s) \leq 0$ für alle $0 \leq s < h$.

Wegen der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms gibt es nach [46], Lemma 5 eine nur von k abhängige Konstante $\tilde{C}_1$, $0 \leq \tilde{C}_1 < 1$, so daß für alle $s \in [0,1)$ gilt:

$$\tilde{C}_1(2 - l_1(0;s)) \geq \sum_{j=2}^{k} |l_j(0;s)| + 1. \qquad (6.1.8)$$

Seien $h \in \Lambda_0$, $x \in \Gamma_h$ und $I^{\pm}(x)$, $I(x)$ wie im Beweis von Lemma 4.1.3.

Für $i \in I^+(x) \cup I^-(x) =: \hat{I}(x)$ bezeichne s_i die lokale Koordinate von x_i^r (bezogen auf x; vgl. Abschnitt 3.2). Es gilt:

$$|I(x)| \leq n-1,\ \hat{I}(x) \neq \emptyset \text{ und } l_1(0;s_i) \leq 0 \text{ für alle } i \in \hat{I}(x).$$

Mit $C_{26} := (n - 1 + \tilde{C}_1) \cdot n^{-1}$ erhält man daraus unter Benutzung von (6.1.8):

$$\begin{aligned}
&h^2 \cdot C_{26} |\Delta_{h,k}(x,x)| \\
&\quad = C_{26} \cdot \sum_{i \in I(x)} 2 + C_{26} \cdot \sum_{i \in \hat{I}(x)} (2 - l_1(0;s_i)) \\
&\quad \geq \sum_{i \in I(x)} 2 + \tilde{C}_1 \cdot \sum_{i \in \hat{I}(x)} (2 - l_1(0;s_i)) \\
&\qquad + (1 - \tilde{C}_1)(n-1)n^{-1} \cdot \Big(\sum_{i \in \hat{I}(x)} (2 - l_1(0;s_i)) - 2 \Big) \\
&\quad \geq \sum_{i \in I(x)} (|-1| + |-1|) \\
&\qquad + \sum_{i \in \hat{I}(x)} \Big(\sum_{j=2}^{k} |l_j(0;s_i)| + |-1| \Big) \\
&\quad = h^2 \cdot \sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} |\Delta_{h,k}(x,y)| \,.
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 6.1.3 bewiesen.

6.1.4 Bemerkung:

Wie bereits in [46], p.163 bemerkt, gibt es für alle $k \geq 5$ ein $s \in [0,h)$, so daß

$$2 - l_1(0;s) \leq \sum_{j=2}^{k} |l_j(0;s)| + 1 .$$

6.1.5 Korollar:

Es gelte 5.0.1.

Dann gilt für alle $h \in \Lambda_0$, alle $w \in H^m(\bar{\Omega}_h)$ mit $w^d = 0$ und alle $v \in \bar{K}(u, \varrho_0, h)$:

$$|w^x|_{h,\infty,m} \leq (C_{26} + (C_{20} + c(\varrho_0))\frac{h^2}{2nd})|w|_{h,\infty,m} + \frac{h^2}{2nd}|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))w)^x|_{h,\infty,m} . \tag{6.1.9}$$

Beweis:

Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 6.1.5.

Seien $x \in \Gamma_h^x$ und $1 \leq j \leq m$. Es ist

$$(((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))w)(x))_j = d_j(x) \cdot \sum_{y \in \Omega_h} \Delta_{h,k}(x,y) w_j(x) + ((B_h(v,x) - B_h(u,x))w(x))_j + (B_h(u,x)w(x))_j .$$

Mit den Abschätzungen aus 5.0.1 folgt:

$$d_j(x)|\Delta_{h,k}(x,x)||w_j(x)| \leq (C_{20} + c(\varrho_0))|w(x)|_\infty + d_j(x) \cdot \sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} |\Delta_{h,k}(x,y)||w(y)|_\infty + |((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))w)^x|_{h,\infty,m} .$$

Also gilt nach Lemma 6.1.3:

$$|w(x)|_\infty \leq (C_{26} + (C_{20} + c(\varrho_o))\frac{h^2}{2n\underline{d}})|w|_{h,\infty,m}$$

$$+ \frac{h^2}{2n\underline{d}} |((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))w)^x|_{h,\infty,m}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nicht von j und x abhängt, ist damit das Korollar bewiesen.

6.1.6 Lemma

Für alle $h \in \Lambda_o$ gilt

(i) $\left|(\mathcal{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathcal{L}^{ox}_{h,k}\right|_{h,\infty,m} \leq 1$

(ii) $\mathcal{L}_{h,k}$ ist invertierbar.

Beweis:

Der Beweis verläuft nach denselben Ideen wie der Beweis von [46], Lemma 7.

(i) Seien $h \in \Lambda_o$ und $e_h^m : \bar{\Omega}_h \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto e_h^m(x) := (1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^m$.

Nach Lemma 6.1.2 ist:

$$(e_h^m)^o = (\mathcal{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathcal{L}^{oo}_{h,k}(e_h^m)^o$$

$$= (\mathcal{L}^{oo}_{h,k})^{-1}(\mathcal{L}_{h,k}e_h^m)^o - (\mathcal{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathcal{L}^{ox}_{h,k}(e_h^m)^x$$

$$= -(\mathcal{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathcal{L}^{ox}_{h,k}(e_h^m)^x.$$

Aus der Inver-Monotonie von $\check{\mathcal{L}}_{h,k}$ folgt nun (i).

(ii) Seien $h \in \Lambda_o$ und $u \in H^m(\bar{\Omega}_h)$ mit $\mathcal{L}_{h,k}u = 0$.

Es ist $u^d = 0$. Setzt man in Korollar 6.1.5 $B_h = 0$, so geht (6.1.9) über in

$$|w^x|_{h,\infty,m} = C_{26}|w|_{h,\infty,m} + \frac{h^2}{2n\underline{d}}|(\mathcal{L}_{h,k}w)^x|_{h,\infty,m}. \qquad (6.1.9')$$

Damit gilt:

$$|u^x|_{h,\infty,m} \leq C_{26} \max \left\{ |u^x|_{h,\infty,m}, |u^o|_{h,\infty,m} \right\}. \qquad (6.1.10)$$

Aus $\mathcal{L}^{o\,o}_{h,k} u^o + \mathcal{L}^{o\,o}_{h,k} u^x = 0$ folgt mit (i)

$$|u^o|_{h,\infty,m} \leq |u^x|_{h,\infty,m} \qquad (6.1.11)$$

(6.1.10) ergibt damit:

$$|u^o|_{h,\infty,m} \leq C_{26} |u^x|_{h,\infty,m}$$

Dies ist wegen $C_{26} < 1$ nur für $|u^x|_{h,\infty,m} = 0$ erfüllbar.

Nach (6.1.11) ist dann auch $|u^o|_{h,\infty,m} = 0$.

Also ist $u = 0$ und damit $\mathcal{L}_{h,k}$ invertierbar.

6.1.7 Lemma (vgl. [46] , Theorem 1)

Es gelte (V_k) zusätzlich zu den bereits gemachten Voraussetzungen.

Dann gibt es eine positive Konstante C_{27}, so daß für alle $h \in \Lambda_o$ und alle $u \in H_\infty(\bar{\Omega}_h)$ mit $u^d = 0$ gilt:

$$|u|_{h,\infty} \leq C_{27} \left(|(\Delta_{h,k} u)^o|_{h,\infty} + h^2 |(\Delta_{h,k} u)^x|_{h,\infty} \right)$$

(6.1.12)

Beweis:

Seien $h \in \Lambda_o$, u wie in Lemma 6.1.7. Nach Lemma 6.1.2 gilt:

$$u = (\check{\Delta}^{-1}_{h,k}) \cdot \begin{bmatrix} (\Delta_{h,k}u)^o \\ u^x \\ o \end{bmatrix}$$

$$= (\check{\Delta}^{-1}_{h,k}) \cdot \begin{bmatrix} (\Delta_{h,k}u)^o \\ o \\ o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\Delta^{o\,o}_{h,k})^{-1}\Delta^{o\,x}_{h,k}u^x \\ u^x \\ o \end{bmatrix} \tag{6.1.13}$$

Mit Lemma 6.1.2 und Lemma 6.1.6 (ii) folgt daraus

$$|u|_{h,\infty} \leq \tilde{c}_1 |(\Delta_{h,k}u)^o|_{h,\infty} + |u^x|_{h,\infty}\,, \tag{6.1.14}$$

wobei $\tilde{c}_1$ die c_{25} entsprechende Konstante für den Fall $m = 1$, $d_1 = 1$ ist.

Für $x \in \Gamma^x_h$ gilt wegen $(\Delta_{h,k}u)(x) = \sum_{y\in\Omega_h} \Delta_{h,k}(x,y)u(y)$:

$$|\Delta_{h,k}(x,x)|\,|u(x)|$$

$$\leq \sum_{\substack{y\in\Omega_h \\ y\neq x}} |\Delta_{h,k}(x,y)|\,|u(y)| + |(\Delta_{h,k}u)(x)|$$

Nach Lemma 6.1.3 folgt daraus

$$|u(x)| \leq c_{26}|u|_{h,\infty} + h^2(2n)^{-1}|(\Delta_{h,k}u)(x)|$$

Also ist

$$|u^x|_{h,\infty} \leq c_{26}|u|_{h,\infty} + h^2(2n)^{-1}|(\Delta_{h,k}u)^x|_{h,\infty} \tag{6.1.15}$$

(6.1.15) in (6.1.14) eingesetzt ergibt

$$|u|_{h,\infty} \leq (1 - c_{26})^{-1} \cdot (\tilde{c}_1 |(\Delta_{h,k} u)^o|_{h,\infty} + h^2 (2n)^{-1} |(\Delta_{h,k} u)^x|_{h,\infty}) .$$

Mit $c_{27} := \max \left\{ \tilde{c}_1 (1 - c_{26})^{-1}, (2n(1 - c_{26}))^{-1} \right\}$ folgt die Behauptung.

6.1.8 Lemma

Seien $l \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ und $\bar{\alpha} = \alpha$ für $l = 2$, $\bar{\alpha} = 1$ sonst.

Ferner sei zusätzlich zu den zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen (V_k) erfüllt.

Dann gibt es eine positive Konstante c_{28}, so daß für alle $h \in \Lambda_o$ und alle $u_h \in H^m(\bar{\Omega}_h)$ mit $u^d = 0$ gilt:

$$|u_h^x|_{h,\infty,m} \leq c_{28} \cdot \left[h^{\bar{\alpha}} |(\mathfrak{L}_{h,k} u_h)^o|_{h,\infty,m} + h^2 |(\mathfrak{L}_{h,k} u_h)^x|_{h,\infty,m} \right] . \qquad (6.1.16)$$

Beweis:

Seien $h \in \Lambda_o$, u wie in Lemma 6.1.8.

Mit ${}^o u_h := (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim\sim})^{-1} (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim\sim} u_h)^o$ und ${}^x u_h := (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim\sim})^{-1} (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim\sim} u_h)^x$

gilt

$$u_h^x = ({}^o u_h + {}^x u_h)^x \qquad (6.1.17)$$

und

$$\mathfrak{L}_{h,k}({}^o u_h) = (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim\sim} u_h)^o, \quad \mathfrak{L}_{h,k}({}^x u_h) = (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim\sim} u_h)^x . \qquad (6.1.18)$$

Nach Lemma 6.1.7 ist wegen $(\mathfrak{L}_{h,k}({}^x u_h))^o = 0$ und $u_h^d = 0$:

$$|({}^x u_h)^x|_{h,\infty,m} \leq c_{27} h^2 |(\mathfrak{L}_{h,k} u_h)^x|_{h,\infty,m} . \qquad (6.1.19)$$

Die entsprechende Abschätzung für $({}^{o}u_h)^x$ ist wesentlich schwieriger zu erhalten. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(i) $m = 1$, $d = 1$ und $1 \leq k \leq 2$.

Offensichtlich sind $l_1^1(0;s) \leq 0$, $l_1^2(0;s) \leq 0$ und $l_2^2(0;s) \geq 0$ für alle $s \in [0,h)$.

Damit ist $\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}}(x,x) < 0$, $\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}}(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in \Omega_h$ mit $x \neq y$.

Nach [66], Lemma 1.3 bzw. [45], Lemma 4.3 ist

$-(\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}} + \Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}}{}^{T})$ positiv definit. Aus [5], Theorem 6.2.3, (H_{26}) und (N_{36}) folgt daraus die Invers-Monotonie von $-\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}}$, insbesondere also $-\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}}(x,y) \leq 0$ für alle $x,y \in \Omega_h$.

Damit ist

$$|(\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}})^{-1}|_{h,\infty} = \max\left\{-\sum_{y \in \Omega_h} -\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}}(x,y) : x \in \Omega_h\right\}.$$

Seien $h \in \Lambda_o$, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 1$, $f_h := \chi(\Omega_h) f$, $w \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f \quad \text{in } \Omega \\ \chi(\Gamma) w &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.20}$$

und $w_h \in H_\infty(\Omega_h)$ Lösung von

$$-\Delta^{\sim}_{h,k^{\sim}} w_h = f_h. \tag{6.1.21}$$

Nach Lemma 4.1.3 gibt es von h unabhängige Konstanten $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$, so daß

$$|(-\Delta_{h,k}(w_h - \chi(\Omega_h) w))^{o}|_{h,\infty,m} \leq \tilde{c}_1 h^{\bar{\alpha}} \tag{6.1.22}$$

$$|(-\Delta_{h,k}(w_h - \chi(\Omega_h) w))^{x}|_{h,\infty,m} \leq \tilde{c}_2 h^{-1} \tag{6.1.23}$$

Wegen $(w_h - \chi(\bar{\Omega}_h) w)^d = 0$ gilt nach Lemma 6.1.7 mit einer geeignet gewählten Konstanten $\tilde{c}_3$:

$$|w_h - \chi(\bar{\Omega}_h) w|_{h,\infty} \leq \tilde{c}_3 h^{\bar{\alpha}}. \tag{6.1.24}$$

Ferner gibt es wegen $w \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ und $\chi(\Gamma) w = 0$ eine Konstante $\tilde{c}_4 > 0$, so daß $|w(x)| \leq \tilde{c}_4 d(x,\Gamma)$.

Damit erhält man für $x \in \Omega_h$:

$$-\sum_{y \in \Omega_h} \bar{\Delta}^{\sim}_{h,k}(x,y) = |w_h(x)| \leq \tilde{c}_3 h^{\bar{\alpha}} + \tilde{c}_4 d(x,\Gamma) \tag{6.1.25}$$

Speziell für $x \in \Gamma_h^x$ gilt also:

$$\begin{aligned} |{}^{\circ}u_h(x)| &= |((\Delta^{\sim}_{h,k})^{-1}(\Delta^{\sim}_{h,k} u_h)^{\circ})(x)| \\ &\leq \Big|\sum_{y \in \Omega_h} \bar{\Delta}^{\sim}_{h,k}(x,y)\Big| \, |(\Delta^{\sim}_{h,k} u_h)^{\circ}|_{h,\infty} \\ &\leq (\tilde{c}_3 h^{\bar{\alpha}} + \tilde{c}_4 h) \, |(\Delta^{\sim}_{h,k} u_h)^{\circ}|_{h,\infty} \end{aligned} \tag{6.1.26}$$

Mit einer geeignet gewählten Konstanten $\tilde{c}_6$ folgt nun aus (6.1.17), (6.1.19) und (6.1.26):

$$|u_h^x|_{h,\infty} \leq \tilde{c}_6 (h^{\bar{\alpha}} |(\Delta_{h,k} u_h)^{\circ}|_{h,\infty} + h^2 |(\Delta_{h,k} u_h)^x|_{h,\infty}) \tag{6.1.27}$$

(ii) $m = 1$, $d = 1$ und $3 \leq k \leq 4$.
In diesem Fall führen die Überlegungen aus (i) nicht zum Ziel, da $-\Delta^{\sim}_{h,k}$ i. a. nicht invers-monoton ist.
Seien $h \in \Lambda_0$, $f_h := (\Delta^{\sim}_{h,k} u_h)^{\circ}$ und $v_h := (\Delta^{\sim}_{h,1})^{-1} f_h$.
Nach (6.1.25) gilt für $x \in \Omega_h$:

$$|v_h(x)| \leq (\tilde{c}_3 h^{\bar{\alpha}} + \tilde{c}_4 d(x,\Gamma)) |f_h|_{h,\infty}. \tag{6.1.28}$$

Ferner ist offensichtlich für $x \in \mathring{\Omega}_h$ $(\Delta^{\sim}_{h,k} v_h)(x) = f_h(x)$

und damit

$$(\tilde{\Delta}_{h,k}(v_h - {}^{\circ}u_h))(x) = 0 \tag{6.1.29}$$

Seien nun $x \in \Gamma_h^x$, $I^{\pm}(x)$, $I(x)$ und s_i wie im Beweis von Lemma 6.1.3.

Für $i \in I(x)$ ist

$$(D_{i,k}^2 v_h)(x) = (D_{i,1}^2 v_h(x)). \tag{6.1.30}$$

Ist $i \in I^{\pm}(x)$, so erhält man aus (3.2.4):

$$(D_{i,k}^2 v_h)(x) = h^{-2}\Big[v_h(x \mp he_i) - 2v_h(x) + \sum_{j=1}^{k} l_j^k(0;s_i) v_h(x \mp (j-1)he_i)\Big]. \tag{6.1.31}$$

Eine elementare Rechnung ergibt:

$$l_1^k(0;s) = l_1^1(0;s) \cdot k$$

$$\left| l_j^k(0;s) \right| \leq k! \tag{6.1.32}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq j \leq k$ und alle $s \in [0,h)$.

Ferner ist

$$h^2 \Delta_{h,1}(x,x) v_h(x) = -h^2 \cdot \sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} \Delta_{h,1}(x,y) v_h(y) + h^2 f_h(x) \tag{6.1.33}$$

Für alle $y \in \Omega_h \setminus \{x\}$ mit $\Delta_{h,1}(x,y) \neq 0$ gilt $d(y,\Gamma) \leq 2h$, $\Delta_{h,1}(x,y) = -h^{-2}$ und damit nach (6.1.28)

$$|v_h(y)| = (\tilde{C}_3 h^{\bar{\alpha}} + \tilde{C}_4 2h) \cdot |f_h|_{h,\infty}.$$

Aus (6.1.33) folgt nun:

$$\left| h^2 \Delta_{h,1}(x,x) v_h(x) \right| \leq \left[2n(\tilde{C}_3 h^{\bar{\alpha}} + \tilde{C}_4 \cdot 2h) + h^2 \right] \cdot |f_h|_{h,\infty} . \tag{6.1.34}$$

Wegen $\Delta_{h,1}(x,x) = -2n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I(x)}}^{n} l_1^1(0;s_i)$ und $l_1^1(0;s_i) \leq 0$

ist auch

$$\left| l_1^1(0;s_i) v_h(x) \right| \leq \left[\tilde{c}_7 h^{\bar{\alpha}} + h^2 \right] |f_h|_{h,\infty} \qquad (6.1.35)$$

für alle $i \in I^+(x) \cup I^-(x)$ mit einer geeignet gewählten Konstanten $\tilde{c}_7$.

Wegen $(\tilde{\Delta}_{h,k}(^0u_h))(x) = (\tilde{\Delta}_{h,1} v_h)(x)$ ergibt nun (6.1.28) bis (6.1.35):

$$\left| (\tilde{\Delta}_{h,k}(v_h - {}^0u_h))(x) \right| = \left| (\tilde{\Delta}_{h,k} v_h)(x) - (\tilde{\Delta}_{h,1} v_h)(x) \right|$$

$$\leq h^{-2} \Big[\sum_{i \in I^+(x)} \Big(\left| (k-1) l_1^1(0;s_i) v_h(x) \right| + \left| l_2^k(0;s_i) v_h(x - he_i) \right| + \ldots + \left| l_k^k(0;s_i) v_h(x - (k-1)he_i) \right| \Big) + \sum_{i \in I^-(x)} \Big(\left| (k-1) l_1^1(0;s_i) v_h(x) \right| + \left| l_2^k(0;s_i) v_h(x + he_i) \right| + \ldots + \left| l_k^k(0;s_i) v_h(x + (k-1)he_i) \right| \Big) \Big]$$

$$\leq \Big(h^{-2} n \left((k-1) \tilde{c}_7 h^{\bar{\alpha}} + k \cdot k! \cdot \tilde{c}_3 h^{\bar{\alpha}} + k^2 k! \tilde{c}_4 h \right) + n(k-1) \Big) |f_h|_{h,\infty}$$

$$\leq h^{-2} \tilde{c}_8 h^{\bar{\alpha}} |f_h|_{h,\infty} \qquad (6.1.36)$$

mit einer geeignet gewählten Konstanten $\tilde{c}_8$.

Aus Lemma 6.1.7 zusammen mit (6.1.29) und (6.1.36) folgt nun

$$|{}^{o}u_h - v_h| \leq c_{27}\tilde{c}_8 h^{\bar{\alpha}} |f_h|_{h,\infty}. \tag{6.1.37}$$

Nach (6.1.28) gilt damit für $x \in \Gamma_h^x$:

$$|{}^{o}u_h(x)| \leq (\tilde{c}_3 h^{\bar{\alpha}} + \tilde{c}_4 h + c_{27}\tilde{c}_8 h^{\bar{\alpha}}) |f_h|_{h,\infty}. \tag{6.1.38}$$

Mit einer geeignet gewählten Konstanten $\tilde{c}_9$ folgt daraus:

$$|({}^{o}u_h)^x|_{h,\infty} \leq \tilde{c}_9 h^{\bar{\alpha}} |(\Delta^{\sim}_{h,\tilde{k}} u_h)^o|_{h,\infty} \tag{6.1.39}$$

Damit gilt für $\tilde{c}_{10} := \max\{\tilde{c}_9, c_{27}\}$ mit (6.1.19):

$$\begin{aligned} |u_h^x|_{h,\infty} &\leq \tilde{c}_9 h^{\bar{\alpha}} |(\Delta^{\sim}_{h,\tilde{k}} u_h)^o|_{h,\infty} + c_{27} h^2 |(\Delta^{\sim}_{h,\tilde{k}} u_h)^x|_{h,\infty} \\ &\leq \tilde{c}_{10}(h^{\bar{\alpha}} |(\Delta_{h,k} u_h)^o|_{h,\infty} + h^2 |(\Delta_{h,k} u_h)^x|_{h,\infty}. \end{aligned} \tag{6.1.40}$$

(iii) $m \geq 1$, d_j wie in Abschnitt 3.1 und $1 \leq k \leq 4$.
Wähle $j_o \in \{1, \ldots, m\}$ so, daß $|u_h^x|_{h,\infty,m} = |u_{h,j_o}|_{h,\infty}$.
Dann gilt nach (6.1.27) bzw. (6.1.40) mit $\tilde{c}_{11} := \max\{\tilde{c}_6, \tilde{c}_{10}\}$:

$$\begin{aligned} |u_h^x|_{h,\infty,m} = |u^x_{h,j_o}|_{h,\infty} &\leq \tilde{c}_{11}\big(h^{\bar{\alpha}} |(\Delta_{h,k} u_{h,j_o})^o|_{h,\infty} \\ &\quad + h^2 |(\Delta_{h,k} u_{h,j_o})^x|_{h,\infty}\big) \\ &\leq \tilde{c}_{11}\underline{d}^{-1}\big(h^{\bar{\alpha}} |(\mathcal{D}_{j_o}\Delta_{h,k} u_{h,j_o})^o|_{h,\infty} \\ &\quad + h^2 |(\mathcal{D}_{j_o}\Delta_{h,k} u_{h,j_o})^x|_{h,\infty,}\big) \\ &\leq c_{11}\underline{d}^{-1}\big(h^{\bar{\alpha}} |(\mathcal{L}_{h,k} u_h)^o|_{h,\infty,m} \\ &\quad + h^2 |(\mathcal{L}_{h,k} u_h)^x|_{h,\infty,m}\big). \end{aligned}$$

Mit $C_{28} := \tilde{C}_{11}\underline{d}^{-1}$ folgt daraus die Behauptung.

6.1.9 Lemma ([11])

Es gibt Konstanten $C_{29} > 0$, $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ und alle $x, y \in \mathring{\Omega}_h$ gilt:

$$|{}^{-}\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}(x,y)| \leq \begin{cases} h^2 C_{29} \left|\ln \frac{C_{29}}{|x-y|_2+h}\right|, & \text{falls } n=2 \\ h^n C_{29}(|x-y|_2+h)^{2-n}, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

Beweis:

$\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}$ erfüllt die an den in [11] mit L_h bezeichneten Operator gemachten Voraussetzungen. (Man beachte, daß für L_h nur "punktweise" Konsistenz gefordert wird.) Die Behauptung ist mit der Aussage des Hauptsatzes der genannten Arbeit identisch.

6.1.10 Lemma

(i) Sei $n = 2,3$.

Dann gibt es Konstanten $C_{30} > 0$, $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ und alle $x \in \mathring{\Omega}_h$ gilt:

$$h^{-n} \cdot \sum_{y \in \mathring{\Omega}_h} ({}^{-}\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}(x,y))^2 \leq C_{30}^2 \qquad (6.1.41)$$

(ii) Sei $n \geq 3$.

Dann gibt es Konstanten $C_{31} > 0$, $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ und alle $x \in \mathring{\Omega}_h$ gilt:

$$h^{-n} \sum_{y \in \mathring{\Omega}_h} d(x,y)^{n-1} \cdot ({}^{-}\Delta^{\circ\,\circ}_{h,k}(x,y))^2 \leq C_{31}^2 \qquad (6.1.42)$$

Beweis:

Wie man leicht nachrechnet, ist $\sigma_{x,\alpha}: \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto \sigma_{x,\alpha}(y) := d(x,y)^{\alpha-n}$ subharmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ für $\alpha \geq n-2$, d. h. $(\Delta_y \sigma_{x,\alpha})(y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$.

Sei nun i_o die entsprechende Konstante aus Lemma 6.1.9.

(i) Wir zeigen (6.1.41) für n = 3. Der Beweis für n = 2 verläuft analog, wenn man beachtet, daß $\ln^2(|x-y|_2)$ subharmonisch in y für $y \neq x$ ist.

Nach Lemma 6.1.9 gilt für $x \neq y$:

$$(\bar{\Delta}^{\circ\circ}_{h,k}(x,y))^2 \leq (C_{29} h^3 d^{-1}(x,y))^2$$

$$\leq C_{29}^2 \, h^6 \, \frac{8 \cdot 3}{h^3 \omega_3} \cdot \int_{K(y,\frac{h}{2})} d(x,z)^{-2} dz$$

wobei ω_n die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Mit $R := \operatorname{diam}(\Omega) + 2 h_{i_o}$ erhält man:

$$h^{-3} \cdot \sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} (\bar{\Delta}^{\circ\circ}_{h,k}(x,y))^2 \leq 24 \, C_{29}^2 \, \omega_3^{-1} \cdot \sum_{\substack{y \in \Omega_h \\ y \neq x}} \int_{K(y,\frac{h}{2})} d(x,z)^{-2} dz$$

$$\leq 24 \, C_{29}^2 \, \omega_3^{-1} \cdot \int_{K(x,R)} d(x,z)^{-2} dz$$

$$\leq 24 \, C_{29}^2 \int_0^R \varrho^2 \cdot \varrho^{-2} d\varrho = 24 \, C_{29}^2 R$$

Also

$$h^{-3} \cdot \sum_{y \in \Omega_h} (\bar{\Delta}^{\circ\circ}_{h,k}(x,y))^2 \leq 24 \, C_{29}^2 R + C_{29}^2 \, h_{i_o}^4 =: C_{30} .$$

(ii) $n \geq 3$. Wiederum mit Lemma 6.1.9 gilt mit den Bezeichnungen aus (i) für $x \neq y$:

$$d(x,y)^{n-1}(-\Delta_{h,k}^{\circ\circ}(x,y))^2 \leq d(x,y)^{n-1}(C_{29}\, h^n\, d(x,y)^{2-n})^2$$

$$= C_{29}^2\, h^{2n}\, d(x,y)^{3-n} \leq C_{29}^2\, h^{2n}\, R\, d(x,y)^{2-n}$$

$$\leq C_{29}^2\, R\, h^{2n}\, \frac{2^n\, n}{h^n \omega_n} \cdot \int_{K(y,\frac{h}{2})} d(x,z)^{2-n}\, dz\ .$$

Also

$$h^{-n} \sum_{y \in \mathring{\Omega}_h} d(x,y)^{n-1}(-\Delta_{h,k}^{\circ\circ}(x,y))^2$$

$$= h^{-n} \sum_{\substack{y \in \mathring{\Omega}_h \\ y \neq x}} d(x,y)^{n-1}(-\Delta_{h,k}^{\circ\circ}(x,y))^2$$

$$\leq C_{29}^2\, R\, 2^n \cdot n\, \omega_n^{-1} \int_{K(x,R)} d(x,z)^{2-n}\, dz$$

$$= C_{29}^2\, R\, 2^n \cdot n \cdot \int_0^R \varrho\, d\varrho = 2^{n-1}\, n\, C_{29}^2\, R^3 =: C_{31}\ .$$

6.1.11 Bemerkung:

Der Umstand, daß die Abschätzung aus Lemma 6.1.10 (i) nur für $n \leq 3$ gilt, spiegelt die Tatsache wider, daß im kontinuierlichen Fall die zum Laplace-Operator gehörende Greenfunktion auch nur für $n \leq 3$ in $L^2(\Omega)$ liegt.

6.1.12 Lemma

Sei $n \geq 3$.
Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $u \in L^\infty(K)$ und $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ Konstanten, so daß

$$u^2(x) \leq \gamma_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}\, u^2(y)\, dy + \gamma_2 \qquad (6.1.43)$$

fast überall.

Dann gibt es nur von n, K und γ_1 abhängige Konstanten C_{32}, $C_{33} > 0$, so daß

$$u^2(x) \leq C_{32} \int_{\mathbb{R}^n} u^2(y)dy + C_{33}\cdot\gamma_2 \qquad (6.1.44)$$

fast überall.

Genauer gilt, falls das Lebesgue-Maß $\lambda(K)$ von K nicht verschwindet:

$$C_{32} = H_n\cdot(\max\{\gamma_1,\ 2\cdot I(K)\})^n$$

$$C_{33} = C_{32}\cdot\lambda(K) - 1$$

$$I(K) = (\inf\{\int_{\mathbb{R}^n} \chi(\mathbb{R}^n\times K)d(x,y)^{1-n}dy : x\in K\})^{-1}$$

$H_n \geq 0$ Konstante, die nur von n abhängt.

Beweis: Seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt:

Für $\lambda(K) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda(K) \neq 0$.

Wegen Trg $u \subset K$ folgt aus (6.1.43)

$$u^2(x) + \chi(K,x)\cdot\gamma_2 \leq \chi(K)\left(\gamma_1\cdot\int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}u^2(y)dy + 2\gamma_2\right)$$

fast überall.

Da K kompakt ist, existiert $k(x;K) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\mathbb{R}^n\times K)d(x,y)^{1-n}dy$ für $x\in\mathbb{R}$.

Ferner gilt mit einem $\mu(K) > 0$: $k(x,K) \geq \mu(K)$ für alle $x\in K$, insbesondere also $I(K) < \infty$.

Sei nun $\tilde{C}_1 := \max\{\gamma_1,\ 2I(K)\}$, so gilt:

$$\tilde{C}_1 \geq \gamma_1$$

$$\tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}\chi(K,y)\gamma_2 dy \geq 2\,I(K)\,\gamma_2\,k(x,K)$$

$$\geq 2\gamma_2 \quad \text{für alle } x\in K.$$

Damit: $u^2(x) + \chi(K,x)\cdot\gamma_2$

$$\leq \chi(K)\tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}(u^2(y) + \chi(K,y)\cdot\gamma_2)dy$$

fast überall.
Setzt man nun

$$w^2(x) := u^2(x) + \chi(K,x)\cdot\gamma_2 \tag{6.1.45}$$

so ist $w^2 \in L^\infty(K)$ und

$$w^2(x) \leq \chi(K)\ \tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}\ w^2(y)\ dy \tag{6.1.46}$$

fast überall.

Sei nun $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq n-2$. Dann ergibt sich unter Verwendung von (6.1.46)

$$\chi(K) \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{\nu-n}\ w^2(y)dy$$

$$\leq \chi(K) \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{\nu-n}\tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,z)^{1-n}\ w^2(z)dzdy \tag{6.1.47}$$

Nach [55], pp 16-20 gilt mit $H_n(\nu) := \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}\ 2^\nu\ \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{n-\nu}{2})}$:

$$\frac{1}{H_n(\nu)H_n(1)} \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{\nu-n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y-z|_2^{1-n}\ w^2(z)\,dz\Big)dy$$

$$\leq \frac{1}{H_n(\nu+1)} \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{(\nu+1)-n}\ w^2(y)dy$$

Damit ergibt sich aus (6.1.47):

$$\chi(K) \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{\nu-n}\ w^2(y)dy$$

$$\leq \frac{H_n(\nu)\,H_n(1)}{H_n(\nu+1)}\ \tilde{C}_1\ \chi(K) \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{(\nu+1)-n}\ w^2(y)dy \tag{6.1.48}$$

Iterative Anwendung von (6.1.48) liefert:

$$\begin{aligned}
&\chi_{(K)}\tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}\, w^2(y)\,dy \\
&\quad \le \frac{H_n(1)^2}{H_n(2)}\, \tilde{C}_1^2\, \chi_{(K)} \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{2-n}\, w^2(y)\,dy \\
&\quad \vdots \\
&\quad \le \frac{H_n(1)^{\nu}}{H_n(\nu)}\, \tilde{C}_1^{\nu}\, \chi_{(K)} \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{\nu-n}\, w^2(y)\,dy\,, \qquad (6.1.49)
\end{aligned}$$

$1 \le \nu \le n-1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

(i) Sei n ungerade, $\nu := \frac{n+1}{2}$. Dann ist $\nu - n = \frac{1-n}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\chi_{(K)}\tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}\, w^2(y)\,dy \\
&\quad \le \frac{H_n(1)^{\frac{n+1}{2}}}{H_n(\frac{n+1}{2})}\, \tilde{C}_1^{\frac{n+1}{2}} \cdot \chi_{(K)} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n}\, w^2(y)\,dy\Big)^{1/2} \times \\
&\qquad\qquad \times \Big(\int_{\mathbb{R}^n} w^2(y)\,dy\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\chi_{(K)}\tilde{C}_1 \Big(\int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n} w^2(y)\,dy\Big)^{1/2} \\
&\quad \le \frac{H_n(1)^{\frac{n+1}{2}}}{H_n(\frac{1+n}{2})}\, \tilde{C}_1^{\frac{n+1}{2}} \cdot \chi_{(K)} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} w^2(y)\,dy\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich mit $H_n := \dfrac{H_n(1)^{n+1}}{H_n(\frac{n+1}{2})^2}$:

$$\chi_{(K)}\tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} \big(d(x,y)^{1-n} w^2(y)\,dy \le H_n \tilde{C}_1\, \chi_{(K)} \int_{\mathbb{R}^n} w^2(y)\,dy \qquad (6.1.50)$$

(ii) Sei n gerade, $\nu := \frac{n+2}{2}$. Dann ist $\nu - n = \frac{2-n}{2}$

$$\frac{H_n(1)^2}{H_n(2)} \tilde{C}_1^2 \chi(K) \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{2-n} w^2(y)dy$$

$$\leq \frac{H_n(1)^{\frac{n+1}{2}}}{H_n(\frac{n+1}{2})} \tilde{C}_1^{\frac{n+1}{2}} \chi(K) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{2-n} w^2(y)\, dy \Big)^{1/2} \times$$
$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^n} w^2\, dy \Big)^{1/2}$$

und somit

$$\frac{H_n(1)^2}{H_n(2)} \tilde{C}_1 \chi(K) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{2-n} w^2(y)dy \Big)^{1/2}$$

$$\leq \frac{H_n(1)^{\frac{n+2}{2}}}{H_n(\frac{n+2}{2})} \tilde{C}_1^{\frac{n+2}{2}} \chi(K) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} w^2(y)dy \Big)^{1/2}$$

Schließlich ergibt sich mit $H_n := \frac{H_n(1)^n H_n(2)}{H_n(\frac{n+2}{2})^2}$

$$\chi(K)\tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n} w^2(y)dy$$

$$\leq \frac{H_n(1)^2}{H_n(2)} \tilde{C}_1^2 \chi(K) \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{2-n} w^2(y)dy$$

$$\leq H_n \tilde{C}_1^2 \chi(K) \int_{\mathbb{R}^n} w^2(y)dy \qquad (6.1.51)$$

Da Trg $w^2 \subset K$, gilt für alle $n \geq 3$

$$w^2(x) \leq \chi(K) \tilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y)^{1-n} w^2(y)\, dy$$
$$\leq H_n \tilde{C}_1^2 \int_{\mathbb{R}^n} w^2(y)dy \qquad (6.1.52)$$

fast überall.

Rücksubstitution ergibt:

$$u^2(x) + \chi(K,x)\cdot\gamma_2 \leq H_n\tilde{C}_1\int_{\mathbb{R}^n}(u^2(y) + \chi(K,y)\cdot\gamma_2)\,dy$$

$$\leq H_n\tilde{C}_1\int_{\mathbb{R}^n}u^2(y)\,dy + H_n\tilde{C}^n\cdot\lambda(K)\cdot\gamma_2$$

fast überall und damit

$$u^2(x) \leq H_n\cdot\max\{\gamma_1, 2I(K)\})^n\int_{\mathbb{R}^n}u^2(y)\,dy$$

$$+ (H_n(\max\{\gamma_1, 2I(K)\})^n\lambda(K) - 1)\cdot\gamma_2$$

fast überall.

6.1.13 Lemma

Es gelten die Voraussetzungen 5.0.1. Ferner seien $1 \leq k \leq 4$ und (V_k) erfüllt.

Dann gibt es Konstanten $C_{34} > 0$ und $\bar{i} \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(\bar{i})$, alle $r \in H^m(\bar{\Omega}_h)$ mit $r^d = 0$ und alle $v \in \bar{K}(u,C_{21},h)$ gilt:

$$|r|_{h,\infty,m} \leq C_{34}\Big[|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^o|_{h,\infty,m}$$

$$+ h^2|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^x|_{h,\infty,m}\Big]. \qquad (6.1.53)$$

Beweis:

Seien i_o wie in Lemma 6.1.10, C_{21} wie in Satz 5.0.2.

Nach Lemma 6.1.2 gilt:

$$r = \check{\mathcal{L}}_{h,k}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathcal{L}_{h,k} r)^{o} \\ r_h^x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \check{\mathcal{L}}_{h,k}^{-1} \begin{bmatrix} ((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{o} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (\mathcal{L}_{h,k}^{o\,o})^{-1} B_h^{o\,o}(v) r^{o} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\mathcal{L}_{h,k}^{o\,o})^{-1} \mathcal{L}_{h,k}^{o\,x} r^{x} \\ r^{x} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.1.54}$$

Wiederum nach dem oben angegebenen Lemma erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} |r|_{h,\infty,m} \leq\ & C_{25} \left| ((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{o} \right|_{h,\infty,m} \\ & + \left| (\mathcal{L}_{h,k}^{o\,o})^{-1} B_h^{o\,o}(v) r^{o} \right|_{h,\infty,m} \\ & + \max\left\{ \left| (\mathcal{L}_{h,k}^{o\,o})^{-1} \mathcal{L}_{h,k}^{o\,o} \right|_{h,\infty,m} |r^{x}|_{h,\infty,m}, |r^{x}|_{h,\infty,m} \right\} \end{aligned} \tag{6.1.55}$$

Für den letzten Summanden in (6.1.55) folgt mit Lemma (6.1.6):

$$\begin{aligned} S_3 :=\ & \max\left\{ \left| (\mathcal{L}_{h,k}^{o\,o})^{-1} \mathcal{L}_{h,k}^{o\,o} \right|_{h,\infty,m} |r^{x}|_{h,\infty,m}, |r^{x}|_{h,\infty,m} \right\} \\ =\ & |r^{x}|_{h,\infty,m} . \end{aligned}$$

Dies ergibt zusammen mit Korollar 6.1.5:

$$S_3 = (C_{26} + (C_{20} + c(\varrho_o))\frac{h^2}{2n\underline{d}})|r|_{h,\infty,m}$$
$$+ \frac{h^2}{2n\underline{d}}\,|((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^x|_{h,\infty,m}\,. \qquad (6.1.56)$$

Eine brauchbare Abschätzung des zweiten Summanden $S_2 := |(\mathcal{L}^{\circ\circ}_{h,k})^{-1}B_h^{\circ\circ}(v)r^\circ|_{h,\infty,m}$ erhält man wie folgt:

Seien $x \in \dot{\Omega}_h$, $1 \le j \le m$ und $\tilde{C}_1 := C_{20} + c(\varrho_o)$ (vgl. 5.0.1). Aus Lemma 6.1.2, angewandt auf den Spezialfall $m = 1$, $d_j = 1$, folgt unter Beachtung von (6.1.1) die Invers-Monotonie von $-\Delta^{\circ\circ}_{h,k}$. Damit gilt:

$$|(((\mathcal{L}^{\circ\circ}_{h,k})^{-1}B_h^{\circ\circ}(v)r^\circ)(x))_j|$$
$$= d_j^{-1}(x)\,|((\Delta^{\circ\circ}_{h,k})^{-1}(B_h^{\circ\circ}(v)r^\circ)_j)(x)|$$
$$\le \tilde{C}_1\,\underline{d}^{-1}\Big(\sum_{y\in\dot{\Omega}_h}(-(^-\Delta^{\circ\circ}_{h,k}(x,y)))\,|r(y)|_\infty\Big).$$

Wir setzen $\tilde{C}_2 := \tilde{C}_1\cdot\underline{d}^{-1}$. Analog zu Lemma 6.1.11 unterscheiden wir nach der Raumdimension n die beiden folgenden Fälle:

(i) $n = 2,3$.

$$S_2 \le \tilde{C}_2\Big(h^{-n}\sum_{y\in\dot{\Omega}_h}(^-\Delta^{\circ\circ}_{h,k}(x,y))^2\Big)^{1/2}\Big(h^n\sum_{y\in\dot{\Omega}_h}|r(y)|_\infty^2\Big)^{1/2}$$
$$\le \tilde{C}_2\cdot c_{30}\sqrt{m}\,|r^\circ|_{h,2,m}$$

nach Lemma 6.1.10.

Damit:

$$|r|_{h,\infty,m} \leq C_{25} |((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{\circ}|_{h,\infty,m}$$
$$+ \tilde{c}_2 \cdot C_{30} \sqrt{m} |r^{\circ}|_{h,2,m}$$
$$+ (C_{26} + (C_{20} + c(\varrho_o)) \frac{h^2}{2n\underline{d}}) |r|_{h,\infty,m}$$
$$+ \frac{h^2}{2n\underline{d}} |((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{x}|_{h,\infty,m} \quad . \qquad (6.1.57)$$

(ii) $n \geq 3$.

$$S_2 \leq \tilde{c}_2 \Big(h^{-n} \cdot \sum_{y \in \mathring{\Omega}_h} d(x,y)^{n-1} (-\Delta^{\circ}_{h,k} {}^{\circ}(x,y))^2 \Big)^{1/2} \times$$
$$\times \Big(h^n \sum_{\substack{y \in \mathring{\Omega}_h \\ y \neq x}} d(x,y)^{1-n} r(y)^2 \Big)^{1/2}$$
$$+ \tilde{c}_2 |-\Delta^{\circ}_{h,k} {}^{\circ}(x,x)| \, |r(x)|_{\infty}$$
$$\leq \tilde{c}_2 c_{31} \Big(h^n \sum_{\substack{y \in \mathring{\Omega}_h \\ y \neq x}} d(x,y)^{1-n} |r(y)|_{\infty}^2 \Big)^{1/2} + \tilde{c}_2 C_{29} h^2 |r(x)|_{\infty}$$

nach Lemma 6.1.9 und Lemma 6.1.10.

Damit:

$$|r|_{h,\infty,m} \leq C_{25} |((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{\circ}|_{h,\infty,m}$$
$$+ \tilde{c}_2 \, c_{31} \Big(h^n \sum_{\substack{y \in \mathring{\Omega}_h \\ y \neq x}} d(x,y)^{1-n} |r(y)|_{\infty}^2 \Big)^{1/2}$$
$$+ \tilde{c}_2 \, C_{29} \, h^2 |r(x)|_{\infty}$$
$$+ (C_{26} + (C_{20} + c(\varrho_o)) \frac{h^2}{2n\underline{d}} |r|_{h,\infty,m}$$
$$+ \frac{h^2}{2n\underline{d}} |((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{x}|_{h,\infty,m}. \qquad (6.1.58)$$

Wähle $i_1 \geq i_o$ so, daß

$$((C_{20} + c(\varphi_o)) \cdot (2nd)^{-1} + \tilde{C}_2\, C_{29})\, h^2 < \tfrac{1}{2}(1 - C_{26})$$

für alle $h \in \Lambda_o(i_1)$.

Um Schreibarbeit zu sparen, definieren wir:

$$\tilde{C}_3 := \sqrt{2}\, \tilde{C}_2 \cdot C_{31}\, (\tfrac{1}{2}(1 - C_{26}))^{-1}$$

$$\tilde{C}_4(h) := \sqrt{2} \cdot (\tfrac{1}{2}(1 - C_{26}))^{-1} \Big[C_{25} \left| ((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^o \right|_{h,\infty,m}$$

$$+ \frac{h^2}{2nd} \left| ((\mathcal{L}_{h,k} + B_h(v))r)^x \right|_{h,\infty,m} \Big].$$

(6.1.58) läßt sich damit schreiben als

$$|r|_{h,\infty,m} \leq \sqrt{2}^{-1} \tilde{C}_3 (h^n \cdot \sum_{\substack{y \in \dot{\Omega}_h \\ y \neq x}} d(x,y)^{1-n} |r(y)|_\infty^2)^{1/2}$$

$$+ \sqrt{2}^{-1} \tilde{C}_4(h).$$

Quadrieren ergibt für alle $x \in \Omega_h$:

$$|r(x)|_\infty^2 \leq \tilde{C}_3^{\,2} (h^n \cdot \sum_{\substack{y \in \dot{\Omega}_h \\ y \neq x}} d(x,y)^{1-n} |r(y)|_\infty^2) + \tilde{C}_4^{\,2}(h). \qquad (6.1.59)$$

Für $h \in \Lambda_o$ und $\bar{y} \in \mathbb{R}_h^n$ seien

$$S(\bar{y},h) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{h}{2} \leq \bar{y}_i - y_i < \frac{h}{2}, 1 \leq i \leq n \right\},$$

$$S(h) := \bigcup_{\bar{y} \in \Omega_h} S(\bar{y},h).$$

$S(h)$ ist Lebesgue-meßbar für alle $h \in \Lambda_o$. Ferner gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{h \in \Lambda_o} S(h) \subset K$.

Wir definieren nun $\tilde{r}(y,h) := |r^o(\bar{y})|_\infty$ falls $y \in S(\bar{y},h)$. (Man beachte, daß nach §2 $r^o(\bar{y}) := 0$ für $\bar{y} \notin \dot{\Omega}_h$.)

Dann ist $\tilde{r}(\cdot,h) \in L^\infty(K)$ und $\tilde{r}$ erfüllt die Ungleichung

$$\tilde{r}(z,h)^2 \leq \tilde{C}_3^2 \Big(h^n \sum_{\substack{y \in \mathring{\Omega}_h \\ y \neq x}} d(z,y)^{1-n}\, \tilde{r}(y,h)^2 \Big) + \tilde{C}_4^2(h)$$

für alle $z \in \mathbb{R}_h^n$.

Also gilt nach Definition des Lebesgue-Integrals:

$$\tilde{r}(z,h)^2 \leq \tilde{C}_3^2 \int_{\mathbb{R}^n} d(z,y)^{1-n}\, \tilde{r}(y,h)^2\, dy + \tilde{C}_4^2(h) \qquad (6.1.60)$$

fast überall in $\mathbb{R}^n$.

Nach Lemma (6.1.12) folgt daraus mit $\gamma_1 := \tilde{C}_3^2$, $\gamma_2 := \tilde{C}_4^2(h)$:

$$\tilde{r}(z,h)^2 \leq C_{32} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{r}(y,h)^2 dy + C_{33}\tilde{C}_4^2(h)$$

fast überall.

Also ist, wiederum nach Definition des Lebesgue-Integrals:

$$|r(x)|_\infty^2 \leq C_{32} h^n \sum_{y \in \mathring{\Omega}_h} |r(y)|_\infty^2 + C_{33}\tilde{C}_4^2(h)$$

für alle $x \in \mathring{\Omega}_h$.

Somit

$$|r|_{h,\infty,m} \leq \sqrt{C_{32}^m}\, |r^\circ|_{h,2,m} + \sqrt{2C_{33}}\, \left(\tfrac{1}{2}(1 - C_{26})\right)^{-1} \times$$
$$\times \Big[C_{25} \left| \left((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r \right)^\circ \right|_{h,\infty,m} + \frac{h^2}{2nd} \left| \left((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r \right)^x \right|_{h,\infty,m} \Big]. \qquad (6.1.61)$$

Sei nun wieder $n \geq 2$:

Es gilt:

$$|r^\circ|_{h,2,m} = \left| (\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\circ}(v))^{-1} (\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\circ}(v)) r^\circ \right|_{h,2,m}$$
$$\leq \left| (\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\circ}(v))^{-1} ((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^\circ \right|_{h,2,m}$$
$$+ \left| (\mathfrak{L}^{\circ\circ}_{h,k} + B_h^{\circ\circ}(v))^{-1} \mathfrak{L}^{\circ x}_{h,k} r^x \right|_{h,2,m} \qquad (6.1.62)$$

Nach Satz 5.0.2 ist:

$$|(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k} + B^{oo}_{h}(v))^{-1}((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{o}|_{h,2,m}$$
$$\leq c_{22}\sqrt{\lambda_h(\dot{\Omega}_h)}\,|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{o}|_{h,\infty,m} \qquad (6.1.63)$$

Nach 5.0.1, 5.0.2, 6.1.2 und 6.1.8 gilt:

$$|(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k} + B^{oo}_{h}(v))^{-1}\mathfrak{L}^{ox}_{h,k}\, r^{x}|_{h,2,m}$$
$$= |(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k} + B^{oo}_{h}(v))^{-1}\mathfrak{L}^{oo}_{h,k}(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathfrak{L}^{ox}_{h,k}\, r^{x}|_{h,2,m}$$
$$\leq |(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k} + B^{oo}_{h}(v))^{-1}(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k} + B^{oo}_{h}(v)) \times$$
$$\times (\mathfrak{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathfrak{L}^{ox}_{h,k}\, r^{x}|_{h,2,m}$$
$$+ |(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k} + B^{oo}_{h}(v))^{-1}B^{oo}_{h}(v)(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathfrak{L}^{ox}_{h,k}\, r^{x}|_{h,2,m}$$
$$\leq |(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathfrak{L}^{ox}_{h,k}\, r^{x}|_{h,2,m}$$
$$+ c_{22}(c_{20} + c(\varrho_o))\sqrt{m}\,|(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathfrak{L}^{ox}_{h,k}\, r^{x}|_{h,2,m}$$
$$\leq (1 + c_{22}(c_{20} + c(\varrho_o))\sqrt{m})\sqrt{\lambda_h(\dot{\Omega}_h)} \times$$
$$\times |(\mathfrak{L}^{oo}_{h,k})^{-1}\mathfrak{L}^{ox}_{h,k}\, r^{x}|_{h,\infty,m}$$
$$\leq \tilde{c}_5 |r^{x}|_{h,\infty,m}$$
$$\leq \tilde{c}_5 c_{28}\, h^{\bar{\alpha}}|(\mathfrak{L}_{h,k}\, r)^{o}|_{h,\infty,m} + h^2|(\mathfrak{L}_{h,k}\, r)^{x}|_{h,\infty,m}$$
$$\leq \tilde{c}_5 c_{28}\, h^{\bar{\alpha}}|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{o}|_{h,\infty,m}$$
$$+ h^2|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^{x}|_{h,\infty,m}$$
$$+ \tilde{c}_5 c_{28}(c_{20} + c(\varrho_o)) \cdot (h^{\bar{\alpha}}|r^{o}|_{h,\infty,m} + h^2|r^{x}|_{h,\infty,m})$$

(6.1.64)

(6.1.63) und 6.1.64) in (6.1.62) eingesetzt ergibt wegen der Beschränktheit von $\lambda_h(\dot{\Omega}_h)$ mit geeigneten Konstanten $\tilde{C}_6$, $\tilde{C}_7$:

$$|r^o|_{h,2,m} \leq \tilde{C}_6 \left(|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^o|_{h,\infty,m} + h^2 |((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^x|_{h,\infty,m} \right) + \tilde{C}_7 h^{\bar{\alpha}} |r|_{h,\infty,m} \tag{6.1.65}$$

(6.1.65) in (6.1.57) eingesetzt liefert für n = 2,3 :

$$\begin{aligned} |r|_{h,\infty,m} \leq & (C_{25} + \tilde{C}_2 C_{30} \sqrt{m}\, \tilde{C}_6) |((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^o|_{h,\infty,m} \\ & + ((2n\underline{d})^{-1} + \tilde{C}_2 C_{30} \sqrt{m} \tilde{C}_6) h^2 |((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^x|_{h,\infty,m} \\ & + (C_{26} + (C_{20} + c(\varrho_o)) \frac{h^2}{2n\underline{d}} + \tilde{C}_2 C_{30} \sqrt{m}\, \tilde{C}_7 h^{\bar{\alpha}} |r|_{h,\infty,m} \end{aligned} \tag{6.1.66}$$

Wähle $\bar{i}$ so, daß

$$(C_{20} + c(\varrho_o)) h^2 (2n\underline{d})^{-1} + \tilde{C}_2 C_{30} \tilde{C}_7 \sqrt{m}\, h^{\bar{\alpha}} \leq \frac{1}{2}(1 - C_{26})$$

für alle $h \in \Lambda_o(i)$.

Dann gilt nach geeigneter Wahl von C_{34}:

$$|r|_{h,\infty,m} \leq C_{34} \left[|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^o|_{h,\infty,m} + h^2 |((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v))r)^x|_{h,\infty,m} \right] .$$

Damit ist Lemma 6.1.13 für n = 2,3 bewiesen.

(6.1.65) in (6.1.61) eingesetzt ergibt für $n \geq 4$:

$$
\begin{aligned}
|r|_{h,\infty,m} \leq\ & \left(\sqrt{2\,C_{33}}\ 2\ (1-C_{26})^{-1}\ C_{25} + \sqrt{C_{32^m}}\ \tilde{C}_6\right) \cdot \\
& \cdot\ \left|\left(\left(\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v)\right)r\right)^{o}\right|_{h,\infty,m} \\
& + \left(\sqrt{2\,C_{33}}\ 2\ \left((1-C_{26})2n\underline{d}\right)^{-1} + \sqrt{C_{32^m}}\ \tilde{C}_6\right) \cdot h^2 \cdot \\
& \cdot\ \left|\left(\left(\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v)\right)r\right)^{x}\right|_{h,\infty,m} \\
& + \tilde{C}_7 h^{\overline{\alpha}} |r|_{h,\infty,m} \qquad (6.1.67)
\end{aligned}
$$

Wähle $\bar{i} \geq i_1$ so, daß $\tilde{C}_7 h^{\overline{\alpha}} < \frac{1}{2}$ für alle $h \in \Lambda_o(\bar{i})$.
Dann gilt für ein geeignet bestimmtes C_{34}:

$$
\begin{aligned}
|r|_{h,\infty,m} \leq C_{34} \Big[& \left|\left(\left(\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v)\right)r^{o}\right)\right|_{h,\infty,m} \\
& + h^2 \left|\left(\left(\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(v)\right)r\right)^{x}\right|_{h,\infty,m} \Big] .
\end{aligned}
$$

Damit ist Lemma 6.1.13 auch für $n \geq 4$ bewiesen.

6.1.14 Bemerkung:

Wie ein Vergleich mit dem Beweis von [46], Theorem 1, zeigt, liefert das letzte Lemma unmittelbar die Konvergenz der Differenzenlösungen gegen die wahre Lösung sowie die Existenz asymptotischer Entwicklungen für $h \longrightarrow 0$, falls f in Problem III linear in u ist.

6.2 Ein Konvergenzsatz

6.2.1 Theorem

Seien $h \in \Lambda_o$, $1 \leq k \leq 4$, $l \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, $\varrho > 0$, $\Gamma \in C^{l,\alpha}$, $g \in C^{l,\alpha,m}(\Gamma)$, $d \in C^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ und $u \in C^{2,0,m}(\bar{\Omega})$ eine isolierte Lösung von Problem III.

Weiter sei $\mathcal{U}(u,\varrho) := \{(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^m : |s - u(x)|_\infty \leq \varrho\}$.

Es gebe ein $\varrho_o > 0$, so daß $f \in C^{2,0,m}(\mathcal{U}(u,\varrho_o))$, falls $l = 3$, und $f \in C^{l-2,1,m}(\mathcal{U}(u,\varrho_o))$, falls $l \geq 4$.

Ferner sei (V_k) erfüllt und es gelte $\lambda_h(\Gamma_h) \longrightarrow 0$ $(h \to 0)$.

Schließlich sei w_h wie in (4.1.6) definiert.

Dann gibt es Konstanten $C_{35} > 0$ und $i_o \in \mathbb{N}$, so daß Problem $DIII_h$ für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ eine Lösung u_h mit

$$|u_h - \chi(\bar{\Omega}_h) w_h|_{h,\infty,m} \leq C_{35} h^{\sigma} \qquad (6.2.1)$$

besitzt, wobei $\sigma := \min\{l - 2 + \alpha, k + 1, 5\}$.

Beweis:

Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 6.2.1, sowie die in 4.1.1 vereinbarten Bezeichnungen. Die dort definierten Abbildungen $B, \mathcal{B}_h$, B_h und die zugehörigen Multiplikationsoperatoren erfüllen die hinsichtlich der entsprechenden Größen in 5.0.1 gemachten Annahmen.

Seien

$$\tilde{C}_1 := m^2 \max\left\{\left|\partial_{u_{i_1}} \partial_{u_{i_2}} f_j(x,\eta)\right| : x \in \bar{\Omega},\ |u(x) - \eta|_\infty \leq C_{21},\ 1 \leq i_1, i_2, j \leq m\right\},$$

$$C_2 := |e^{(1)}|_{C,0,0,m} + h_1^2\left(|e^{(2)}|_{C,0,0,m} + |\tilde{e}|_{C,0,0,m}\right),$$

wobei h_1 das erste Glied der Folge Λ_o bezeichnet.

$\tilde{c}_3 > 0$ und $i_1 \in \mathbb{N}$ seien so gewählt, daß für alle $h \in \Lambda_o(i_1)$ gilt:

$$\tilde{c}_3 + \tilde{c}_2 h^2 \leq c_{21} \tag{6.2.2}$$

$$4 \cdot \tilde{c}_1 \cdot \tilde{c}_3 \max\{c_{34}, c_{34} h^2\} < 1 . \tag{6.2.3}$$

Schließlich seien $h \in \Lambda_o(i_1)$ und $\eta_h, \xi_h \in \tilde{K}(w_h, \tilde{c}_3, h) :=$
$\left\{ \zeta_h \in H_m^\infty(\bar{\Omega}_h) : |\zeta_h - \chi(\bar{\Omega}_h) w_h|_{h,\infty,m} \leq \tilde{c}_3, \ \zeta_h^d = \chi(\Gamma_h) g \right\}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &|\eta_h - \chi(\bar{\Omega}_h) u|_{h,\infty,m} \\ &\quad \leq |\eta_h - \chi(\bar{\Omega}_h) w_h|_{h,\infty,m} \\ &\qquad + |\chi(\bar{\Omega}_h)(e^{(1)} + h^2(e^{(2)} + \tilde{e}))|_{h,\infty,m} \cdot h^2 \\ &\quad \leq \tilde{c}_3 + \tilde{c}_2 \cdot h^2 \leq c_{21} \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

nach (6.2.2).

Entsprechend erhält man

$$|\xi_h - \chi(\bar{\Omega}_h) u|_{h,\infty,m} \leq c_{21} \tag{6.2.5}$$

Ferner ist für $x \in \Omega_h$:

$$\begin{aligned} &|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(\eta_h))(\eta_h - \xi_h))(x)| \\ &\quad \leq |(\mathfrak{L}_{h,k} \eta_h(x) + f(x, \eta_h(x)) \\ &\qquad - ((\mathfrak{L}_{h,k} \xi_h)(x) + f(x, \xi_h(x))|_\infty \\ &\qquad + |f(x, \xi_h(x)) - f(x, \eta_h(x)) \\ &\qquad - \partial_u f(x, \eta_h(x))(\xi_h(x) - \eta_h(x))|_\infty \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Nach Definition von $\tilde{C}_1$ gilt:

$$\begin{aligned} &|f(x, \xi_h(x)) - f(x, \eta_h(x)) \\ &\qquad - \partial_u f(x, \eta_h(x))(\xi_h(x) - \eta_h(x))|_\infty \\ &\leq \tilde{C}_1 |\xi_h(x) - \eta_h(x)|_\infty^2 . \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Mit $\psi_{h,k}: \tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h) \to H_\infty^m(\bar{\Omega}_h)$, $\zeta_h \mapsto \psi_{h,k}(\zeta_h)$,

$$\psi_{h,k}(\zeta_h)(x) := (\mathfrak{L}_{h,k}\zeta_h)(x) + f(x, \zeta_h(x))$$

gilt nach Lemma 6.1.13 zusammen mit (6.2.6) und (6.2.7):

$$\begin{aligned} |\eta_h - \xi_h|_{h,\infty,m} &\leq C_{34}\left[|((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(\eta_h))(\eta_h - \xi_h))^\circ|_{h,\infty,m}\right. \\ &\qquad \left. + h^2 |((\mathfrak{L}_{h,k} + B_h(\eta_h))(\eta_h - \xi_h))^x|_{h,\infty,m}\right] \\ &\leq C_{34}\left[|(\psi_{h,k}(\eta_h) - \psi_{h,k}(\xi_h))^\circ|_{h,\infty,m}\right. \\ &\qquad \left. + h^2 |(\psi_{h,k}(\eta_h) - \psi_{h,k}(\xi_h))^x|_{h,\infty,m}\right] \\ &\qquad + \max\{C_{34}, C_{34}h^2\}\cdot\tilde{C}_1 \cdot |\xi_h - \eta_h|_{h,\infty,m}^2 . \end{aligned}$$

Nach Wahl von ξ_h, η_h und $\tilde{C}_3$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} |\eta_h - \xi_h|_{h,\infty,m} \leq 2C_{34}&\left[|(\psi_{h,k}(\eta_h) - \psi_{h,k}(\xi_h))^\circ|_{h,\infty,m}\right. \\ &\left. + h^2 |(\psi_{h,k}(\eta_h) - \psi_{h,k}(\xi_h))^x|_{h,\infty,m}\right] . \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Hieraus folgt sofort die Injektivität und damit die Bijektivität von $\psi_{h,k}$, aufgefaßt als Abbildung von $\tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h)$ nach $\psi_{h,k}(\tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h))$.

Für festes $h \in \Lambda_o(i_1)$ ist $\psi_{h,k}$ als Summe stetiger Abbildungen und $\psi_{h,k}^{-1}$ nach (6.2.8) stetig.

Somit ist $\psi_{h,k}$ ein Homöomorphismus zwischen $\tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h)$ und $\psi_{h,k}(\tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h))$.

Sei nun $\zeta_h \in H_\infty^m(\bar{\Omega}_h)$.

Durch

$$|\zeta_h|_{h,G,m} := \max \left\{ |\zeta_h^o|_{h,\infty,m},\ h^2 \cdot |\zeta_h^x|_{h,\infty,m} \right\} \quad (6.2.9)$$

wird auf $H_\infty^m(\bar{\Omega}_h)$ eine Seminorm erklärt, deren Einschränkung auf $H_\infty^m(\Omega_h)$ zu der auf diesem Raum kanonischen Norm äqivalent ist.

Wir betrachten nun $\psi_{h,k}$ als Abbildung von $\tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h)$, versehen mit der kanonischen Norm, auf $\psi_{h,k}(\tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h))$, versehen mit der von $|\cdot|_{h,G,m}$ erzeugten Topologie.

$\psi_{h,k}$ bleibt ein Homöomorphismus, da wegen $\chi(\Gamma_h)\psi_{h,k}(\zeta_h) = \chi(\Gamma_h)g$ für alle $\zeta_h \in \tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h)$ die von $|\cdot|_{h,G,m}$ auf $\psi_{h,k}(\tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h))$ erzeugte Topologie zur ursprünglich gegebenen äquivalent ist.

(6.2.8) geht für $\eta_h,\ \xi_h \in \tilde{K}(w_h, \tilde{C}_3, h)$ über in

$$|\eta_h - \xi_h|_{h,\infty,m} \leq 2C_{34} |\psi_{h,k}(\eta_h) - \psi_{h,k}(\xi_h)|_{h,G,m} . \quad (6.2.10)$$

$\psi_{h,k}$ bildet als Homöomorphismus das Innere von $\tilde{K}(w_h, \frac{\tilde{C}_3}{2}, h)$ auf das Innere von $\psi_{h,k}(\tilde{K}(w_h, \frac{\tilde{C}_3}{2}, h))$ und den Rand von $\tilde{K}(w_h, \frac{\tilde{C}_3}{2}, h)$ auf den Rand von $\psi_{h,k}(\tilde{K}(w_h, \frac{\tilde{C}_3}{2}, h))$ ab.

Für $\zeta_h \in \partial\tilde{K}(w_h, \frac{\tilde{C}_3}{2}, h)$ gilt andererseits nach (6.2.10):

$$|\psi_{h,k}(\zeta_h) - \psi_{h,k}(\chi(\bar{\Omega}_h)w_h)|_{h,G,m} \leq \tilde{C}_3 (4C_{34})^{-1} =: \tilde{C}_4 .$$

Also ist

$$\{\zeta_h \in H^m(\bar{\Omega}_h) : \zeta_h^d = \chi(\Gamma_h)g, \quad |\zeta_h - \psi_{h,k}(\chi(\bar{\Omega}_h)w_h)|_{h,G,m} \leq \tilde{c}_4\}$$

$$\subset \psi_{h,k}(\tilde{K}(w_h, \tilde{c}_3, h)) \ . \qquad (6.2.11)$$

Nach Korollar 4.1.5 gilt

$$|\psi_{h,k}(\chi(\bar{\Omega}_h)w_h)|_{h,G,m} \leq \tilde{c}_5 h^{\sigma} \ , \qquad (6.2.12)$$

wobei $\tilde{c}_5 := \max\{c_9, c_{10}\}$ und σ wie in Satz 6.2.1 definiert ist.

Wähle $i_o \geq i_1$ so, daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ $\tilde{c}_5 h^{\sigma} \leq \tilde{c}_4$ gilt.

Dann gibt es nach (6.2.11) für jedes $h \in \Lambda_o(i_o)$ ein wegen der Bijektivität von $\psi_{h,k}$ eindeutig bestimmtes $u_h \in \tilde{K}(w_h, \tilde{c}_3, h)$ mit $\psi_{h,k}(u_h) = 0$, d.h. $-(\mathfrak{L}_{h,k} u_h)(x) = f(x, u_h(x))$ für alle $x \in \bar{\Omega}_h$.

Aus (6.2.10) schließlich folgt mit $\eta_h := \chi(\bar{\Omega}_h)w_h$, $\xi_h := u_h$ und (6.2.12):

$$|\chi(\bar{\Omega}_h)w_h - u_h|_{h,\infty,m} \leq 2 c_{34} |\psi_{h,k}(\chi(\Omega_h)w_h|_{h,G,m}$$

$$= 2 c_{34} \tilde{c}_5 h^{\sigma} \ .$$

Mit $c_{35} := 2 c_{34} \tilde{c}_5$ folgt daraus (6.2.1).

6.2.2 Bemerkungen

(i) Seien speziell $k = 4$ und $l \geq 7$. Theorem 6.2.1 besagt dann: Zu jeder Lösung u des Problems III gibt es ein $i_o \in \mathbb{N}$ sowie von h unabhängige Funktionen $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ und $\tilde{e}$, so daß für al-

le $h \in \Lambda_o(i_o)$ eine Lösung u_h des Problems D III$_h$ existiert mit

$$u_h = \chi(\bar{\Omega}_h)(u + h^2 e^{(1)} + h^4(e^{(2)} + \tilde{e})) + r_h \qquad (6.2.13)$$

wobei $r_h \in H^m_\infty(\bar{\Omega}_h)$ mit $|r_h|_{h,\infty,m} = O(h^5)$.

(ii) Wie bereits früher bemerkt, gibt es eine nur vom Gebiet Ω abhängige Konstante $\tilde{C}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o$ und alle $w_h \in H^m(\Omega_h)$ gilt: $|w_h|_{h,2,m} \leq \tilde{C}\, |w_h|_{h,\infty,m}$. Damit bleibt (6.2.1) auch nach Übergang zur Norm $|\cdot|_{h,2,m}$ richtig. Insbesondere gilt (6.2.13) mit $|r_h|_{h,2,m} = O(h^5)$.

(iii) Eine Analyse des Beweises von Theorem 6.2.1 in Verbindung mit Bemerkung 4.1.4 zeigt, daß sich zu (6.2.1) analoge Aussagen auch für den Fall beweisen lassen, daß die Funktionen u, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ und $\tilde{e}$ nur in Ω hinreichend glatt sind, sofern die im Beweis des 4.1.3 entsprechenden Lemmas auftretenden partiellen Ableitungen der genannten Funktionen auf Ω gleichmäßig beschränkt sind.

(iv) Verwendet man für die Randextrapolation nicht in allen Punkten $x \in \Gamma^x_h$ Polynome desselben Grades k, so wird das globale Konvergenzverhalten vom Wert des kleinsten auftretenden Extrapolationsparameters k bestimmt.

§7 Die Konvergenz der Linienmethode

7.1 Das nichtlineare Problem

Dieser Abschnitt hält sich eng an [71], wo entsprechende Aussagen für eine skalare nichtlineare parabolische Differentialgleichung in einer Raumvariablen ohne Randinterpolation betrachtet werden.

Grundlegend für das folgende ist ein auf M.Müller [44] zurückgehender Vergleichssatz für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.

7.1.1 Satz

Seien $\hat{m} \in \mathbb{N}$, $0 < \hat{T}$, $J_o := [0,\hat{T})$ und $\hat{f}: J_o \times \mathbb{R}^{\hat{m}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\hat{m}}$ stetig.

Dann ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u}(t) &= \hat{f}(t,\hat{u}(t)) \\ \hat{u}(0) &= \hat{u}_o \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

für jeden Anfangswert $\hat{u}_o$ lokal lösbar.

Es bezeichne $J(\hat{u})$ das Existenzintervall der Lösung $\hat{u}$.

Seien $\hat{v},\hat{w} \in C^{1,0,\hat{m}}(J_o)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jede Lösung $\hat{u}$ von (7.1.1) gibt es ein $t_o \in J(\hat{u})$, so daß

$$\hat{v}(t) < \hat{u}(t) < \hat{w}(t)$$

für alle $t \in (0,t_o)$.

(ii) Für $1 \leq j \leq \hat{m}$, $t \in J_o$ gilt:

$$\partial_t \hat{v}_j(t) < \hat{f}_j(t,z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ mit

$$\hat{v}(t) \leq z \leq \hat{w}(t) \text{ und } z_j = \hat{v}_j(t),\ z_i = \hat{v}_i(t) \text{ für alle } i \in I_j^+(t)$$
$$z_i = \hat{w}_i(t) \text{ für alle } i \in I_j^-(t)$$

und

$$\partial_t \hat{w}_j(t) > \hat{f}_j(t,z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ mit

$$\hat{v}(t) \leq z \leq \hat{w}(t) \text{ und } z_j = \hat{w}_j(t), \; z_i = \hat{w}_i(t) \text{ für alle } i \in I_j^+(t)$$

$$z_i = \hat{v}_i(t) \text{ für alle } i \in I_j^-(t)$$

wobei

$$I_j^{\pm}(t) := \left\{ i : 1 \leq i \leq m,\ i \neq j,\ \hat{f}_j(t,z) \text{ monoton } \begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix} \text{ in } z_i \right\}$$

Dann ist jede Lösung $\hat{u}$ von (7.1.1) auf ganz J_o fortsetzbar und es gilt

$$\hat{v}(t) < \hat{u}(t) < \hat{w}(t) \qquad (7.1.2)$$

für alle $t \in (0,T)$.

Beweis:

Satz 7.1.1 folgt sofort aus dem Existenzsatz von Peano (vgl. [72]) und [70], 12.IV.

Zusätzlich zu den in Abschnitt 3.1 für Problem I gemachten Annahmen seien für die Konvergenzbetrachtungen die nachfolgenden Voraussetzungen erfüllt. Diese lassen sich in einigen Punkten abschwächen. Man muß dann in Korollar 7.1.5 die für k zulässigen Werte weiter einschränken und eine schlechtere Konvergenzordnung hinnehmen bzw. sogar ganz auf Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit verzichten.

7.1.2 Voraussetzungen

(i) Das System (3.1.1) sei gleichmäßig parabolisch, d.h. es gebe ein $\chi > 0$, so daß für alle $1 \leq j \leq m$, $(t,x) \in \bar{\Omega}_T$, $u \in \mathbb{R}^m$ und $r, \bar{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $\bar{r} \leq r$ gilt:

$$f_j(t,x,u,r) - f_j(t,x,u,\bar{r}) \geq \chi \sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r}_i) \qquad ((7.1.3)$$

(ii) f sei quasimonoton wachsend in u (vgl. [70]), d.h. für alle $1 \leq j \leq m$, $(t,x) \in \bar{\Omega}_T$, $r \in \mathbb{R}^n$ und $u, \bar{u} \in \mathbb{R}^m$ mit $\bar{u} \leq u$, $\bar{u}_j = u_j$ gelte:

$$f_j(t,x,u,r) \geq f_j(t,x,\bar{u},r) \qquad (7.1.4)$$

(iii) f genüge in u und r einer einseitigen lokalen Lipschitz- bzw. Hölderbedingung, d.h. es gebe Konstanten χ_u, $\chi_r > 0$, $1 \geq \beta > 0$ und Funktionen $\gamma, \delta \in C(J_o, \mathbb{R}^+)$, so daß für alle $1 \leq j \leq m$, $(t,x) \in \bar{\Omega}_T$, $u, \bar{u} \in \mathbb{R}^m$ mit $\bar{u} \leq u$, $|u - \bar{u}|_\infty \leq \chi_u$ und alle $r, \bar{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $\bar{r} \leq r$, $|r - \bar{r}|_\infty \leq \chi_r$ gilt:

$$f_i(t,x,u,r) - f_j(t,x,\bar{u},\bar{r}) \leq \gamma(t) \sum_{j=1}^{m} (u_j - \bar{u}_j) + \delta(t) \sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r}_i)^\beta \tag{7.1.5}$$

(iv) Es sein $1 \geq 2$, $0 < \alpha \leq 1$.
Die exakte Lösung u von Problem I liege in $C^1(J_o, C^{1,\alpha,m}(\bar{\Omega}))$.

(v) Seien $h \in \Lambda_o$, C_7, C_8, σ_3, σ_4 wie in Lemma 4.1.3, $C_{36} := \max\{C_7, C_8\}$, $\sigma := \min\{\sigma_3, \sigma_4 + 2\}$, $\bar{\delta} := |\delta|_C$, $\tilde{C}_1$ wie in (6.1.8) und

$$\varrho_o > \begin{cases} m\bar{\delta} C_{36} \cdot (\chi(1 - \tilde{C}_1))^{-1}, & \text{falls } \beta = 1,\ \sigma - \sigma_4 = 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann bezeichne $\varrho(h, \varrho_o, t) \in C(\bar{J}_o)$ die auf ganz $\bar{J}_o$ existierende, eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$\partial_t \varrho(h, \varrho_o, t) = m\left(\gamma(t) \cdot \varrho(h, \varrho_o, t) + \delta(t) C_{36} h^{\sigma\beta}\right) \quad \text{für } t \in \bar{J}_o \tag{7.1.6}$$

$$\varrho(h, \varrho_o, 0) = \varrho_o h^{\sigma\beta} \tag{7.1.7}$$

Es gilt offensichtlich $\varrho(h, \varrho_o, t) \geq \varrho_o h^{\sigma\beta}$ für alle $t \in \bar{J}_o$.
Damit ist

$$\varrho(h, \varrho_o, t) \leq h^{\sigma\beta} \cdot \left(\varrho_o + mC_{36} \int_0^T \delta(s)\, ds\right) \exp\left(m \int_0^T \gamma(s)\, ds\right) \tag{7.1.8}$$

für alle $t \in [0,T]$.

7.1.3 Bemerkung

Aus 7.1.2 (ii), (iii) folgt nach [70], 33.I die Eindeutigkeit der Lösung von Problem I.

7.1.4 Satz (Abschätzungssatz)

Seien die in §3 für Problem I bzw. Problem $D I_h$ gemachten Voraussetzungen sowie 7.1.2 erfüllt.

Dann gibt es ein $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ Problem $D I_h$ eine auf ganz J_o existierende Lösung u_h besitzt. Für diese gilt:

$$-\varrho(h, \varrho_o, t)e \leq u(t,x) - u_h(t,x) \leq \varrho(h, \varrho_o, t)e \qquad (7.1.9)$$

für alle $(t,x) \in \bar{\Omega}_{h,T}$.

Ist $\beta = 1$ in 7.1.2(iii), so ist u_h eindeutig bestimmt.

Beweis:

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes.

Wähle $i_o \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ gilt:

$$h \leq \min\Big\{1, \Big[\Big(\varrho_o + m C_{36} \int_0^T \delta(s)ds\Big) \exp\Big(m \int_0^T \gamma(s)ds\Big)^{-1} \varkappa_u\Big]^{\frac{1}{\sigma\beta}}, \; (C_{36}^{-1} \varkappa_r)^{\frac{1}{\sigma_4 \beta}}, \; (C_{36}^{-1} \varkappa_r)^{\frac{1}{\sigma_3 \beta}}\Big\}, \qquad (7.1.10a)$$

$$h^{(\sigma_4 - \sigma)\beta + 2} \leq (1 - \tilde{C}_1)\, \varrho_o (m \bar{\delta} C_{36})^{-1} \qquad (7.1.10b)$$

Sei $h \in \Lambda_o(i_o)$. (3.2.5) zusammen mit (3.2.7) entspricht einem Differentialgleichungssystem der Art (7.1.1) mit $\hat{m} := m|\Omega_h|$.

Die Komponenten dieses Systems seien mit Hilfe der Paare $(j,x) \in M_h := \{1,\dots,m\} \times \Omega_h$ durchnummeriert. Genauer sei $\varphi: M_h \longrightarrow \{1,\dots,\hat{m}\}$ eine Bijektion. Für $\hat{z} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ sei $z: \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto z(x) := (\hat{z}_{\varphi(1,x)}, \dots, \hat{z}_{\varphi(m,x)})^T$.

Ist $z\colon \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}^m$, so sei $\bar{z}\colon \bar{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\bar{z}(x) = z(x)$ für $x \in \Omega_h$ und $\bar{z}(x) := g(x)$ für $x \in \Gamma_h$.

Die Funktion $\hat{f}\colon J_o \times \mathbb{R}^{\hat{m}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\hat{m}}$,

$$(t,\hat{z}) \longmapsto \hat{f}(t,\hat{z}) := (\hat{f}_1(t,\hat{z}),\ldots,\hat{f}_{\hat{m}}(t,\hat{z}))^T$$

sei nun definiert durch

$$\hat{f}_\mu(t,\hat{z}) := f_j\Big(t,x,z(x),\big(D_1^2\bar{z}_j\big)(x),\ldots,\big(D_n^2\bar{z}_j\big)(x)\Big), \quad (7.1.11)$$

wobei $1 \le \mu \le \hat{m}$ und $(j,x) := \varphi^{-1}(\mu)$.

Schließlich sei für $u\colon \Omega_{h,T} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die Funktion $\hat{u}\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$,

$$t \longmapsto \hat{u}(t) := (\hat{u}_1(t),\ldots,\hat{u}_m(t))^T$$

gegeben durch $\hat{u}_\mu(t) := u_j(t,x)$ für $1 \le \mu \le \hat{m}$ und $(j,x) := \varphi^{-1}(\mu)$.

Damit geht (3.2.5) über in das Differentialgleichungssystem

$$\partial_t \hat{u}(t) = \hat{f}(t,\hat{u}(t)) \quad (7.1.12)$$

mit den durch (3.2.6) gegebenen Anfangsbedingungen

$$\hat{u}(0) = (\hat{u}_1(0),\ldots,\hat{u}_{\hat{m}}(0))^T,\ \hat{u}_\mu(0) := \psi_j(x) \quad (7.1.13)$$

für $1 \le \mu \le \hat{m}$, $(j,x) := \varphi^{-1}(\mu)$.

Die Randbedingungen (3.2.7) sind dabei über (7.1.11) bereits in (7.1.12) berücksichtigt.

Sei nun $\hat{u}_h$ eine nach Satz 7.1.1 lokal stets existierende Lösung von (7.1.12), (7.1.13) mit Existenzintervall $J(\hat{u}_h)$.

Wir bezeichnen mit v_h bzw. w_h die durch

$$(t,x) \longmapsto v_h(t,x) \quad (7.1.14)$$

$$:= (u_1(t,x) - \wp(h,\wp_o,t),\ldots,u_m(t,x) - \wp(h,\wp_o,t))^T$$

bzw.

$$(t,x) \longmapsto w_h(t,x) \quad (7.1.15)$$

$$:= (u_1(t,x) + \wp(h,\wp_o,t),\ldots,u_m(t,x) + \wp(h,\wp_o,t))^T$$

definierten Funktionen aus $C^1(J_o, H^m_\infty(\Omega_h))$.

Wir zeigen im folgenden, daß $\hat{v}_h$, $\hat{u}_h$ und $\hat{w}_h$ die Voraussetzungen (i) und (ii) des Satzes 7.1.1 erfüllen. Die Behauptung mit Ausnahme der Eindeutigkeit im Fall $\beta = 1$ folgt dann sofort aus dem oben genannten Satz.

Die Voraussetzung (i) von 7.1.1 ist nach 7.1.2(v) erfüllt.

Der Nachweis der zweiten Voraussetzung von 7.1.1 ist langwieriger.

Seien zunächst $1 \leq j \leq m$ und $x \in \dot{\Omega}_h$.
Dann ist mit (3.2.1): $I^+_{\varphi(j,x)}(t) = \{1,\dots,\hat{m}\} \setminus \{\varphi(j,x)\}$.
Damit bleibt für $\mu := \varphi(j,x)$ und $t \in J_o$ zu zeigen:

$$\partial_t \hat{v}_{h,\mu}(t) < \hat{f}_\mu(t,\hat{v}_h(t)) \tag{7.1.16}$$

$$\partial_t \hat{w}_{h,\mu}(t) > \hat{f}_\mu(t,\hat{w}_h(t)) \tag{7.1.17}$$

Nach (7.1.11) und (3.2.1) ist:

$$\hat{f}_\mu(t,\hat{v}_h(t)) \tag{7.1.18}$$
$$= f_j\left(t,x,u(t,x)-\varrho(h,\varrho_o,t)e,\left(D_1^2 u_j(t)\right)(x),\dots,\left(D_n^2 u_j(t)\right)(x)\right)$$

(3.1.1) in Verbindung mit Lemma 4.1.3 und 7.2.1(i) ergibt:

$$\partial_t u_j(t,x) < f_j\left(t,x,u(t,x),\left(D_1^2 u_j(t)\right)(x) + c_{36} h^{\sigma_3},\right.$$
$$\left.\dots,\left(D_n^2 u_j(t)\right)(x) + c_{36} h^{\sigma_3}\right) \tag{7.1.19}$$

Hieraus erhält man mit (7.1.6) und 7.1.2(i) - (iii):

$$\partial_t \hat{v}_{h,\mu}(t) = \partial_t u_j(t,x) - \partial_t \varrho(h,\varrho_o,t)$$
$$< f_j\left(t,x,u(t,x),\left(D_1^2 u_j(t)\right)(x) + c_{36} h^{\sigma_3},\dots\right.$$
$$\left.\dots,\left(D_n^2 u_j(t)\right)(x) + c_{36} h^{\sigma_3}\right)$$
$$- m\left(\gamma(t)\cdot\varrho(h,\varrho_o,t) + \delta(t) c_{36} h^{\sigma\beta}\right)$$
$$\leq f_j\left(t,x,u(t,x) - \varrho(h,\varrho_o,t)e,\left(D_1^2 u_j(t)\right)(x),\dots\right.$$
$$\left.\left(D_n^2 u_j(t)\right)(x)\right)$$
$$= \hat{f}_\mu(t,\hat{v}_{h,\mu}(t))$$

Damit ist (7.1.16) bewiesen. (7.1.17) zeigt man analog.

Seien nun $1 \leq j \leq m$ und $x \in \Gamma_h^x$.

Da die Differenzenquotienten D_i^2 für mindestens ein $i \in \{1,\dots,n\}$ durch (3.2.4) gegeben sind, ist jetzt für $k \geq 3$ $\hat{f}_\mu(t,\hat{z})$ i.a. nicht mehr quasimonoton wachsend in $\hat{z}$.

Wir definieren für $1 \leq \nu \leq m$:

$$\tilde{v}_{h,\nu}(t,x) := \begin{cases} \hat{w}_{h,\nu}(t) & \text{für } \nu \in \mathcal{M}(x) \\ \hat{v}_{h,\nu}(t) & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.1.20}$$

$$\tilde{w}_{h,\nu}(t,x) := \begin{cases} \hat{v}_{h,\nu}(t) & \text{für } \nu \in \mathcal{M}(x) \\ \hat{w}_{h,\nu}(t) & \text{sonst} \end{cases}, \tag{7.1.21}$$

wobei

$$\mathcal{M}(x) := \{\varphi(j,y) : 1 \leq j \leq m,\ y \neq x, \text{ der Faktor bei } u(y) \text{ in } (D_i^2 u)(x),\ 1 \leq i \leq n, \text{ ist negativ}\}.$$

Die Voraussetzung (ii) des Satzes 7.1.1 ist für $\mu := \varphi(t,x)$ erfüllt, falls für alle $t \in J_o$ gilt:

$$\partial_t \hat{v}_{h,\mu}(t) < \hat{f}_\mu(t,\tilde{v}_h(t,x)) \tag{7.1.22}$$

$$\partial_t \hat{w}_{h,\mu}(t) > \hat{f}_\mu(t,\tilde{w}_h(t,x)) \tag{7.1.23}$$

Seien $1 \leq i \leq n$. Für $x \notin \Gamma_{h,i}^x$ gilt

$$\left(D_i^2 \tilde{v}_h,\ \varphi(j,y)(t,x)\right)(x) = \left(D_i^2 u_j(t)\right)(x),$$

wobei der Differenzenoperator D_i^2 auf der linken Seite bezüglich y zu verstehen ist.

Für $x \in \Gamma_{h,i}^x$ erhält man mit (3.2.4), (7.1.7) und (6.1.8)

$$\left(D_i^2 \tilde{v}_h,\ \varphi(j,y)(t,x)\right)(x)$$

$$\geq \left(D_i^2 u_j(t)\right)(x) + (1 - \tilde{c}_1)\, h^{-2} \varrho_o h^{\sigma\beta} \tag{7.1.24}$$

Da $x \in \Gamma^x_{h,i}$ für mindestens ein $i \in \{1,\dots,n\}$, gilt mit 7.1.2(i) und 7.1.2(v):

$$\hat{f}_\mu(t,\tilde{v}_h(t,x)) \geq f_j\Big(t,x,u(t,x) - \varrho(h,\varrho_o,t)e,\big(D_1^2 u_j(t)\big)(x),\dots,\big(D_n^2 u_j(t)\big)(x)\Big) + \chi(1-\tilde{c}_1)\cdot\varrho_o h^{-2} h^{\sigma\beta} \qquad (7.1.25)$$

Somit erhält man unter Verwendung von 7.1.2(i) - (v) und Lemma 4.1.3:

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{v}_{h,\mu}(t) &= \partial_t u_j(t,x) - \partial_t \varrho(h,\varrho_o,t) \\
&\leq f_j\Big(t,x,u(t,x),\big(D_1^2 u_j(t)\big)(x) + c_{36} h^{\sigma_4},\dots \\
&\qquad \dots,\big(D_n^2 u_j(t)\big)(x) + c_{36} h^{\sigma_4}\Big) \\
&\quad - m\Big(\gamma(t)\,\varrho(h,\varrho_o,t) + \delta(t)\, c_{36} h^{\sigma\beta}\Big) \\
&\leq f_j\Big(t,x,u(t,x) - \varrho(h,\varrho_o,t)e,\big(D_1^2 u_j(t)\big)(x),\dots \\
&\qquad \dots,\big(D_n^2 u_j(t)\big)(x)\Big) \\
&\quad + m\,\delta(t)\, c_{36}\,(h^{\sigma_4\beta} - h^{\sigma\beta}) \\
&\leq \hat{f}_\mu(t,\tilde{v}_h(t,x)) + m\,\delta(t)\, c_{36}\cdot(h^{\sigma_4\beta} - h^{\sigma\beta}) \\
&\qquad - \chi(1-\tilde{c}_1)\,\varrho_o h^{\sigma\beta-2} \\
&\leq \hat{f}_\mu(t,\tilde{v}_h(t,x)),
\end{aligned}$$

nach Wahl von i_o und ϱ_o.

Damit ist (7.1.22) gezeigt. Der Beweis von (7.1.23) verläuft analog.

Die Eindeutigkeit der Lösung u_h im Falle $\beta = 1$ ist eine unmittelbare Konsequenz von [70], Satz 14.II.

7.1.5 Korollar

Seien die Voraussetzungen von Satz 7.1.4 erfüllt.

Dann gibt es eine positive Konstante C_{37} und ein $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ gilt:
Jede Lösung u_h von Problem $D I_h$ läßt sich auf ganz J_o fortsetzen und erfüllt dort die Ungleichung

$$| u(t,x) - u_h(t,x) |_\infty \leq C_{37} h^{\sigma\beta} \qquad (7.1.26)$$

für alle $(t,x) \in \Omega_{h,T}$.

Ist $\beta = 1$ in 7.1.2(iii), so ist u_h eindeutig bestimmt.

Beweis:

Das Korollar folgt sofort aus Satz 7.1.4 zusammen mit (7.1.8).

7.1.6 Bemerkungen

(i) Wie (7.1.8) zeigt, wächst C_{37} und damit der Fehler in (7.1.26) im wesentlichen exponentiell in T.

(ii) Eine um bis zu zwei h-Potenzen niedrigere Konsistenzordnung der räumlichen Diskretisierung am Rand wirkt sich im vorliegenden Fall nicht auf die Ordnung des globalen Fehlers aus. Dies ändert sich, wenn man auf die Forderung nach gleichmäßiger Parabolizität des Ausgangsproblems verzichtet. Wie eine genauere Analyse des Beweises von Satz 7.1.4 zeigt, bestimmt dann die lokal kleinste Konsistenzordung die Ordnung des globalen Fehlers.

(iii) Es bereitet keine großen Schwierigkeiten, Satz 7.1.4 und Korollar 7.1.5 dahingehend zu verallgemeinern, daß f_j in (3.1.1) auch noch von den ersten partiellen Ableitungen von u_j abhängen darf. Um die Quasimonotonie von $\hat{f}$ auch in diesem Fall zu sichern, ist es dann notwendig, entweder

Monotonievoraussetzungen hinsichtlich der Abhängigkeit von f von diesen Ableitungen zu machen und einseitige Differenzennäherungen für die ersten partiellen Ableitungen zu verwenden, was in der Regel zu einer niedrigeren Konvergenzordnung führt, oder aber zu verlangen, daß f einer Lipschitzbedingung in den ersten Ableitungen genügt. Im letztgenannten Fall erhält man die Quasimonotonie von $\hat{f}$ für hinreichend kleine h dadurch, daß die zweiten Differenzennäherungen wegen des zusätzlichen h-Faktors im Nenner die ersten Differenzennäherungen schließlich dominieren.

(iv) Ist eine hinreichende räumliche Differenzierbarkeit der Lösung u von Problem I auf Γ_T nicht gesichert, so lassen sich trotzdem (vgl. Bemerkung 4.1.4) zu Satz 7.1.4 bzw. Korollar 7.1.5 analoge Aussagen beweisen. Allerdings wird die Konvergenzordnung in diesen Fällen i.a. kleiner sein als in Korollar 7.1.5 angegeben. Ist u auf Γ_T nicht nach der Zeit differenzierbar, so ist dies für die vorliegende Betrachtung ohne Bedeutung.

(v) Die Bedingung 7.1.2(iii) kann durch schwächere Abschätzungen ersetzt werden, wenn man die $\varrho(h, \varrho_o, t)$ definierende Gleichung (7.1.6) entsprechend modifiziert. Ob man eine Konvergenzaussage erhält und von welcher Art diese ist, hängt vom Verhalten von ϱ als Funktion von t und h ab.

(vi) Bedingung 7.1.2(ii) wird von vielen praktisch wichtigen Problem nicht erfüllt. Sie ist aber eine für die verwendete Beweismethode unabdingbare und in gewisser Weise auch natürliche Voraussetzung. Letzteres wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die Gültigkeit von Satz 7.1.1 bedeutet, daß der Lösungsoperator des zugehörigen Differentialgleichungssystems gewisse Monotonieeigenschaften besitzt. Man wird erwarten, daß eine konvergente Diskretisierung von 3.1.1 diese Eigenschaften i.a. nur dann besitzt, wenn dies für 3.1.1 selbst der Fall ist. In [70] , §32 wird ge-

zeigt, daß die Voraussetzungen 7.1.2 gerade so gewählt sind, daß dies der Fall ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir für den semilinearen Fall ein Konvergenzresultat beweisen, bei dem man ohne 7.1.2(ii) auskommt.

(vii) Verwendet man für die Randextrapolation nicht in allen Punkten $x \in \Gamma_h^x$ Polynome desselben Grades, so wird das globale Konvergenzverhalten vom Wert des kleinsten auftretenden Extrapolationsgrades bestimmt.

7.2 Das semilineare Problem

Wie bereits im letzten Abschnitt bemerkt, werden wir nachfolgend die Konvergenz der Linienmethode bei semilinearen parabolischen Systemen, die nicht notwendigerweise einer Quasimonotoniebedingung in der Nichtlinearität genügen, beweisen.

Wir benötigen dazu das folgende, einfache Randmaximumprinzip für die räumlich diskretisierten Gleichungen.

7.2.1 Lemma

Seien $1 \leq k \leq 4$, $h \in \Lambda_o$, $u_o \in H_\infty^m(\Omega_h)$ und $\tau \in [0,T)$. Ferner sei (V_k) erfüllt.

Dann ist das gewöhnliche Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t;\tau,u_o) &= \tilde{\mathcal{L}}_{h,k}(t)\, u(t;\tau,u_o) \\ u(\tau;\tau,u_o) &= u_o \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

für $\tau \leq t \leq T$ stets eindeutig lösbar. Die Lösung u ist aus $C^1([\tau,T], H_\infty^m(\Omega_h))$ und erfüllt die Abschätzung

$$|u(t;\tau,u_o)|_{h,\infty,m} \leq |u_o|_{h,\infty,m} \tag{7.2.2}$$

für alle $t \in [\tau,T]$.

Beweis:

Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 7.2.1.

Die Behauptung folgt, mit Ausnahme von (7.2.2), sofort aus bekannten Sätzen über Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. [72]). Zu zeigen bleibt also (7.2.2).

Für $u_o = 0$ ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit von (7.2.1) die Ungleichung (7.2.2) trivialerweise erfüllt. Sei also $u_o \neq 0$.

(i) $m = 1$.

Angenommen, es gibt ein $\vartheta > 1$, so daß

$$t_o := \min\{t \geq \tau : |u(t)|_{h,\infty} \geq \vartheta |u_o|_{h,\infty}\} \in [\tau, T].$$

Sei $x_o \in \Omega_h$ mit $|u(t_o,x_o)| = |u(t_o)|_{h,\infty}$. Wegen der Linearität von (7.2.1) kann man OBdA $u(t_o,x_o) > 0$ annehmen.

Mit $M_h := \{x \in \Omega_h : u(t_o,x) = u(t_o,x_o)\}$ gilt:

$$|u(t_o,x)| \leq u(t_o,x_o) \quad \text{für alle } x \in \Omega_h \tag{7.2.3}$$

und

$$\partial_t u(t_o,x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in M_h. \tag{7.2.4}$$

α) Sei $\emptyset \neq \Gamma_h^x \cap M_h \ni \bar{x}$. Dann ist nach (7.2.1), (7.2.3), (7.2.4) und Lemma 6.1.3:

$$0 \leq \partial_t u(t_o,\bar{x}) = (\tilde{\mathcal{L}}_{h,k}(t_o) u(t_o))(\bar{x})$$

$$\leq d_1(t_o,\bar{x})(C_{26} - 1) u(t_o,\bar{x}) < 0.$$

Also gilt: $\Gamma_h^x \cap M_h = \emptyset$.

β) Sei $\emptyset \neq \mathring{\Omega}_h \cap M_h \ni \bar{x}$. Dann erhält man mit (7.2.1), (7.2.3), (7.2.4) und (3.2.1):

$$0 \leq \partial_t u(t_o,\bar{x}) = (\tilde{\mathcal{L}}_{h,k}(t_o) u(t_o))(\bar{x})$$

$$= d_1(t_o,\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} \left(D_i^2 u(t_o)\right)(\bar{x}) \leq 0.$$

Also ist für $1 \leq i \leq n$ $\left(D_i^2 u(t_o)\right)(\bar{x}) = 0$ und damit $\bar{x} \pm h e_i \in M_h$. Eine Wiederholung dieser Überlegungen ergibt wegen des Gitterzusammenhangs von $\mathring{\Omega}_h$: $\Gamma_h^x \cap M_h \neq \emptyset$. Dies ist aber nach α) nicht möglich.

(ii) $m > 1$:
Nach Konstruktion von $\mathcal{L}_{h,k}(t)$ zerfällt 7.1.2 in m unabhängige Differentialgleichungssysteme für jede der Komponenten u_j von u. (i) ergibt $|u_j(t)|_{h,\infty} \leq |u_{o,j}|_{h,\infty}$ für alle $1 \leq j \leq m$ und $t \in [\tau, T]$. Daraus folgt sofort die Behauptung.

7.2.2 Lemma

Seien $1 \leq k \leq 4$, $\Omega_\Lambda := \left\{(t,x,h): h \in \Lambda_o,\ (t,x) \in \Omega_{h,T}\right\}$, $H: \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}^m$ stetig und stetig nach t differenzierbar und d, f wie in Problem II mit:

(i) $\partial_t d \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T)$.

(ii) Es gibt ein $\gamma \in C([0,T])$, so daß für alle $(t,x) \in \bar{\Omega}_T$ und alle $z, \bar{z} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$|f(t,x,z) - f(t,x,\bar{z})|_\infty \leq \gamma(t)|z - \bar{z}|_\infty . \qquad (7.2.5)$$

(iii) Es gibt Konstanten C_{38}, C_{39}, σ_5 und σ_6, so daß für alle $h \in \Lambda_o$ und alle $(t,x) \in \Omega_{h,T}$ gilt

$$|H(t,x,h)|_\infty \leq \begin{cases} C_{38} h^{\sigma_5} & , \text{falls } x \in \mathring{\Omega}_h \\ C_{39} h^{\sigma_6} & , \text{falls } x \in \Gamma_h^x \end{cases} \qquad (7.2.6)$$

$$|\partial_t H(t,x,h)|_\infty \leq \begin{cases} C_{38} h^{\sigma_5} & , \text{falls } x \in \mathring{\Omega}_h \\ C_{39} h^{\sigma_6} & , \text{falls } x \in \Gamma_h^x . \end{cases} \qquad (7.2.7)$$

Für $h \in \Lambda_o$ seien $\psi_h \in H_\infty^m(\Omega_h)$ und $g_h \in C^1([0,T], H_\infty^m(\Gamma_h))$. Ferner seien u_h, $v_h \in C^1([0,T], H_\infty^m(\Omega_h))$, $h \in \Lambda_o$, die stets eindeutig existierenden Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\partial_t u_h(t,x) = (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim}(t) u_h(t))(x) + (\mathfrak{L}_{h,k}^{d}(t) g(t))(x) + f(t,x,u_h(t,x)) \quad \text{für } (t,x) \in \Omega_{h,T} \tag{7.2.8}$$

$$u_h(0,x) = \psi_h(x) \quad \text{für } x \in \Omega_h, \tag{7.2.9}$$

beziehungsweise

$$\partial_t v_h(t,x) = (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim}(t) v_h(t))(x) + (\mathfrak{L}_{h,k}^{d}(t) g(t))(x) + f(t,x,v_h(t,x)) + H(t,x,h) \quad \text{für } (t,x) \in \Omega_{h,T} \tag{7.2.10}$$

$$v_h(0,x) = \psi_h(x) \quad \text{für } x \in \Omega_h \tag{7.2.11}$$

Schließlich seien $\sigma := \min\{\sigma_5, \sigma_6 + 2\}$ und (V_k) erfüllt.

Dann gibt es Konstanten $C_{40} > 0$ und $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ und alle $t \in [0,T]$ gilt:

$$|u_h(t) - v_h(t)|_{h,\infty} \leq C_{40} h^{\sigma} \quad . \tag{7.2.12}$$

Beweis:

Es gelten die Voraussetzungen des Lemmas.
Die eindeutige Existenz der Lösungen von (7.2.8),(7.2.9) bzw. (7.2.10),(7.2.11) folgt sofort aus bekannten Sätzen über Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wähle nun i_o wie in Theorem 6.2.1.

Für $h \in \Lambda_o(i_o)$ und $t \in [0,T]$ sei $w_h(t) \in H_\infty^m(\bar{\Omega}_h)$ die nach Theorem 6.2.1 stets eindeutig existierende Lösung von

$$
\begin{aligned}
-(\mathcal{L}_{h,k}\bar{w}_h(t))(x) &= -H(t,x,h) && \text{für } x \in \Omega_h \\
\bar{w}_h(t)(x) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma_h \,.
\end{aligned}
\tag{7.2.13}
$$

Da die Funktionen d_j, $1 \leq j \leq m$, und H als stetig nach der Zeit differenzierbar vorausgesetzt wurden, ist auch $w_h(t)$ stetig nach t differenzierbar und es gilt

$$
\begin{aligned}
-(\mathcal{L}_{h,k}(t)\,\partial_t w_h(t))(x) &= (\dot{\mathcal{L}}_{h,k}(t) w_h(t))(x) - \partial_t H(t,x,h) \\
& && \text{für } x \in \Omega_h \\
\partial_t w_h(t)(x) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma_h
\end{aligned}
\tag{7.2.14}
$$

Dabei bezeichnet $\dot{\mathcal{L}}_{h,k}(t)$ denjenigen Operator, den man erhält, wenn man in $\mathcal{L}_{h,k}(t)$ $d_j(t)$ durch $\partial_t d_j(t)$ ersetzt.

Nach Lemma 6.1.13, spezialisiert auf den Fall $B_h = 0$, folgt mit (7.2.6):

$$
\begin{aligned}
|w_h(t)|_{h,\infty,m} &\leq c_{34}\,(c_{38} h^{\sigma_5} + c_{39} h^{\sigma_6 + 2}) \\
&\leq \tilde{c}_1 h^{\sigma} \,,
\end{aligned}
\tag{7.2.15}
$$

für alle $t \in [0,T]$.

Für $(t,x) \in \Omega_{h,T}$ ist

$$
\begin{aligned}
&|(\mathcal{L}_{h,k}(t) w_h(t))(x)|_\infty \\
&\quad \leq \max_{1 \leq j \leq m} \left| \partial_t d_j(t,x) \left(d_j(t,x)\right)^{-1} \left((\mathcal{L}_{h,k}(t) w_h(t))(x)\right)_j \right| \\
&\quad \leq \max_{1 \leq j \leq m} |\partial_t d_j|_C \cdot \underline{d}^{-1}\, H(t,x,h) \,.
\end{aligned}
\tag{7.2.16}
$$

Aus Lemma 6.1.13 zusammen mit (7.2.6), (7.2.7) und (7.2.16) folgt die Existenz einer Konstanten $\tilde{c}_2 > 0$, so daß für alle $t \in [0,T]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&|\partial_t w_h(t)|_{h,\infty,m} \\
&\quad \le c_{34}\left(1+\max\{|\partial_t d_j|_C : 1 \le j \le m\}\, d^{-1}\right)\left(c_{38} h^{\sigma_5} + c_{39} h^{\sigma_6+2}\right) \\
&\quad \le \tilde{c}_2 h^{\sigma} \quad . \qquad (7.2.17)
\end{aligned}
$$

Sei nun $r_h := v_h - u_h + w_h$. Nach (7.2.8) - (7.2.11) und (7.2.13) - (7.2.14) genügt r_h der Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
\partial_t r_h(t,x) &= (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim}(t) r_h(t))(x) - (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim}(t) w_h(t))(x) \\
&\quad + f(t,x,v_h(t,x)) - f(t,x,u_h(t,x)) \\
&\quad + H(t,x,h) + \partial_t w_h(t,x) \\
&= (\mathfrak{L}_{h,k}^{\sim}(t) r_h(t))(x) + \partial_t w_h(t,x) \\
&\quad + f(t,x,v_h(t,x)) - f(t,x,u_h(t,x)) \qquad (7.2.18)
\end{aligned}
$$

für alle $(t,x) \in \Omega_{h,T}$ und

$$
r_h(0,x) = w_h(0,x) \qquad (7.2.19)
$$

für alle $x \in \Gamma_h$.

In der Notation aus Lemma 7.2.1 folgt aus (7.2.5) und (7.2.18) - (7.2.19) nach der Methode der Variation der Konstanten für $0 \le t \le T$

$$
\begin{aligned}
|r_h(t)|_{h,\infty,m} &\le |u(t;0,w_h(0))|_{h,\infty,m} \\
&\quad + \int_0^t |u(t;\tau, \partial_t w_h(\tau))|_{h,\infty,m}\, d\tau \qquad (7.2.20) \\
&\quad + \int_0^t \gamma(\tau)\, |v_h(\tau) - u_h(\tau)|_{h,\infty,m}\, d\tau
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 7.2.1, (7.2.16) und (7.2.17) ergibt dies

$$|v_h(t) - u_h(t)|_{h,\infty,m} \leq \tilde{c}_1 h^\sigma + \tilde{c}_1 h^\sigma + \int_0^t \tilde{c}_2 h^\sigma \, d\tau$$
$$+ \int_0^t \gamma(\tau) |v_h(\tau) - u_h(\tau)|_{h,\infty,m} \, d\tau$$
$$\leq \int_0^t \gamma(\tau) |v_h(\tau) - u_h(\tau)|_{h,\infty,m} \, d\tau$$
$$+ \tilde{c}_3 h^\sigma \qquad (7.2.21)$$

für alle $t \in [0,T]$, wobei $\tilde{c}_3 := 2\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 T$.

Nach dem Lemma von Gronwall (vgl. [72], 29.XI) folgt daraus für alle $t \in [0,T]$:

$$|v_h(t) - u_h(t)|_{h,\infty,m} \leq \tilde{c}_3 h^\sigma \cdot \exp\left(\int_0^T \gamma(\tau) \, d\tau \right) \qquad (7.2.22)$$

Mit $c_{40} := \tilde{c}_3 \exp\left(\int_0^T \gamma(\tau) \, d\tau \right)$ ist damit (7.2.12) bewiesen.

7.2.3 Korollar (Konvergenzsatz für Problem $D\,II_h$)

Seien $1 \leq k \leq 4$, $l \geq 2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und (V_k) erfüllt.

Mit den Bezeichnungen aus Problem II gelte:

$$\partial_t d \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T), \quad \partial_t g \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\Gamma_T) \text{ und } \psi \in C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega}).$$

Ferner gebe es ein $\gamma \in C([0,T])$, so daß für alle $(t,x) \in \bar{\Omega}_T$ und alle $z, \bar{z} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$|f(t,x,z) - f(t,x,\bar{z})|_\infty \leq \gamma(t) |z - \bar{z}|_\infty .$$

Für die, unter den gemachten Voraussetzungen eindeutige Lösung u des Problems II gelte: $\partial_t u(t) \in C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ mit $|\partial_t u(t)|_{C,l,\alpha,m} \leq c_{11}$ für alle $t \in [0,T]$ mit einer geeignet gewählten Konstanten c_{11}. Ferner seien $\partial_t^2 u \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T)$ und $\partial_t f(\cdot,x,u(\cdot,x)) \in \mathcal{C}^{0,0,m}(\bar{\Omega}_T)$.

Dann gibt es Konstanten $C_{41} > 0$ und $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_o(i_o)$ die stets eindeutig existierende Lösung u_h von Problem $D\,II_h$ für alle $t \in [0,T]$ der Abschätzung

$$|\chi(\Omega_h)u(t) - u_h(t)|_{h,\infty,m}^{\cdot} \leq C_{41}\, h^{\sigma} \quad ,$$

mit $\sigma := \min\{1-2+\alpha, k+1, 2\}$ genügt.

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus Lemma 4.2.1 und Lemma 7.2.2.

7.2.4 Korollar (Konvergenzsatz für Problem $D\,II_h\,S$)

Seien $1 \leq k \leq 4$, $l \geq 4$, $0 < \alpha < 1$ und (V_k) erfüllt.

Mit den Bezeichnungen aus Problem II S (Abschnitt 4.2) gelte: $d \in C^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$, $B = (b_{i,j})$ mit $b_{i,j} \in C^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ für $1 \leq i,j \leq m$, $f \in \mathcal{C}^{l-2,\alpha,m}(\bar{\Omega}_T)$, $g \in \mathcal{C}^{l,\alpha,m}(\Gamma_T)$, $\psi \in C^{l,\alpha,m}(\bar{\Omega})$ und $\Gamma \in C^{l,\alpha}$.

ψ und g sollen die Kompatibilitätsbedingung der Ordnung $[l/2]$ bezüglich (4.2.7) erfüllen.

Das stationäre Problem:

$$\begin{aligned} -(\mathcal{L}+B)w &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ \chi(\Gamma)w &= 0 \qquad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{7.2.24}$$

besitze nur die triviale Lösung $w = 0$.

Ferner seien v_h wie in 4.2.7 definiert und $u_h \in C^1([0,T], H_\infty^m(\bar{\Omega}_h))$ die stets eindeutig existierende Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t u_h(t,x) = (\mathcal{L}_{h,k}(t))(x) + B(x)u(t,x) + f(t,x) \tag{7.2.25}$$

für $(t,x) \in \Omega_{h,T}$, mit

$$u_h(t,x) = g(t,x) \quad \text{für } (t,x) \in \Gamma_{h,T} \tag{7.2.26}$$

$$u_h(0,x) = v_h(0,x) \quad \text{für } x \in \bar{\Omega}_h \tag{7.2.27}$$

Dann gibt es Konstanten $C_{42} > 0$ und $i_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $h \in \Lambda_0(i_0)$ und alle $t \in [0,T]$ mit $\sigma := \min\{1 - 4 + \alpha, k + 1{,}5\}$ gilt:

$$|\chi(\Omega_h) v_h(t) - u_h(t)|_{h,\infty,m} \leq C_{42}\, h^{\sigma} \tag{7.2.28}$$

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus Lemma 4.2.8 und Lemma 7.2.2.

7.2.5 Bemerkung

Im Gegensatz zu den in §6 für elliptische Systeme erhaltenen Ergebnissen liefert Korollar 7.2.4 eine asymptotische Fehlerentwicklung für die Lösung des diskreten Problems nach geeigneter Abänderung der Anfangsbedingungen. Dies erschwert eine praktische Verwendung dieses Resultats in Fehlerkorrekturverfahren.

§8 Bemerkungen zur praktischen Verwertung der asymptotischen Fehlerentwicklungen

In diesem Paragraphen werden einfache Methoden konstruiert, welche die in dieser Arbeit bewiesenen asymptotischen Fehlerentwicklungen zur Genauigkeitsverbesserung der numerischen Näherungslösungen benutzen. Diese werden an einer Reihe von Beispielen numerisch getestet.

Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung elliptischer Systeme. Eine Übertragung auf die in Abschnitt 7.2 behandelten linearen parabolischen Gleichungen ist leicht möglich, wenn man die abgeänderten Anfangsbedingungen für u_h, $e^{(1)}$ und $e^{(2)}$ geeignet berücksichtigt.

Um die Darstellung etwas zu vereinfachen, gehen wir ferner von einer asymptotischen Fehlerentwicklung der Gestalt

$$u_h = \chi(\bar{\Omega}_h)(u + h^2 e^{(1)} + h^4(e^{(2)} + \tilde{e})) + O(h^\sigma) \qquad (8.0.1)$$

mit $\sigma > 4$ aus. Eine solche Entwicklung existiert nach Satz 6.2.1 für Näherungslösungen, die mit den Verfahren dieser Arbeit berechnet wurden, falls $k = 4$ und $1 + \alpha > 6$ sind. Die Betrachtungen können leicht auf den Fall $2 < \sigma \leq 4$ übertragen werden, indem man die $\tilde{e}^{(2)} := e^{(2)} + \tilde{e}$ betreffenden Korrekturschritte wegläßt. Für $\sigma \leq 2$ existieren keine asymptotischen Fehlerentwicklungen.

8.1 Theoretische Überlegungen

Es gibt im wesentlichen zwei Klassen von Verfahren, welche asymptotische Entwicklungen der Art (8.0.1) zur Genauigkeitsverbesserung verwenden: Richardson-Extrapolation und Deferred- bzw. Defect-Correction-Methoden.

Die Richardson-Extrapolation (vgl. [62]) hat im vorliegenden Fall mehrere Nachteile. Soll die verbesserte Näherung auf dem ganzen Gittergebiet Ω_h berechnet werden, so müssen die in den Korrekturschritten verwendeten Gitterlängen h_1 bzw. h_2 ganzzahlige Bruchteile der Ausgangsgitterlänge h sein, was die Anzahl der Unbekannten in den zugehörigen Gleichungssystemen auf mindestens das 2^n- bzw. 3^n-fache anwachsen läßt. Ferner müssen die Gittergebiete Ω_h, Ω_{h_1} und Ω_{h_2} die Voraussetzung (V_k) erfüllen. Die Wahl eines geeigneten Ausgangsgitters kann deshalb Schwierigkeiten bereiten, insbesondere dann, wenn Ω eine komplizierte Randgeometrie besitzt. Selbst wenn die verbesserte Näherung nur in einem einzelnen Punkt des Gittergebiets Ω_h berechnet werden soll, das Verhältnis von h zu h_1 bzw. h_2 also nicht mehr ganzzahlig zu sein braucht, kann es schwierig sein, geeignete h_1 und h_2 zu finden, so daß Ω_h, Ω_{h_1} und Ω_{h_2} den entsprechenden Punkt gemeinsam haben und (V_k) erfüllt ist.

Aus (8.0.1) folgt sofort, daß im vorliegenden Fall zwei Richardson-Schritte zu einem Verfahren der Ordnung h^σ führen.

Eine andere Möglichkeit, die Entwicklung (8.0.1) zur Genauigkeitsverbesserung zu benutzen, ergibt sich, wenn man beachtet, daß die in dieser Entwicklung auftretenden Funktionen $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ und $\tilde{e}$ nach §4 selbst Lösungen der Dirichlet-Probleme (4.1.2), (4.1.3) und (4.1.5) sind, also selbst näherungsweise mit den Verfahren aus §3 numerisch berechnet werden können. Dies ist gerade der Grundgedanke der Deferred-Correction-Methode (vgl. [50], [51]).

Damit bietet sich folgendes Vorgehen an:
Seien D_i^4 bzw. D_i^6 Differenzennäherungen für ∂_i^4 bzw. ∂_i^6 und $(f,\cdot,\cdot)$ wie in (4.1.4).

Verfahren 1

a) Löse

$$(-\mathcal{L}_{h,k}U^{(o)})(x) = \begin{cases} f(x,U^{(o)}(x)), & \text{falls } x \in \Omega_h \\ g(x), & \text{falls } x \in \Gamma_h . \end{cases} \tag{8.1.1}$$

b) Löse

$$\begin{aligned} &(-\mathcal{L}_{h,k}E^{(1)})(x) - f_u(x,U^{(o)}(x))E^{(1)}(x) \\ &\quad = \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{4!} D_i^4 U^{(o)}(x), && \text{falls } x \in \Omega_h \\ &E^{(1)}(x) = 0 && \text{falls } x \in \Gamma_h . \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

c) Setze $U^{(1)} := U^{(o)} + h^2 E^{(1)}$.

d) Löse

$$\begin{aligned} &(-\mathcal{L}_{h,k}\tilde{E}^{(2)})(x) - f_u(x,U^{(1)}(x))\tilde{E}^{(2)}(x) \\ &\quad = \mathcal{D}(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{6!} D_i^6 U^{(1)}(x) + \frac{2}{4!} D_i^4 E^{(1)}(x) \right) \\ &\qquad + (f,U^{(1)}(x),E^{(1)}(x)), && \text{falls } x \in \Omega_h \\ &\tilde{E}^{(2)}(x) = 0 && \text{falls } x \in \Gamma_h . \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

e) Berechne $U^{(2)} := U^{(o)} + h^2 E^{(1)} + h^4 \tilde{E}^{(2)}$ als endgültige Näherung für eine Lösung u von Problem III.

Wären $E^{(1)} = \chi(\bar{\Omega}_h)e^{(1)}$ und $\tilde{E}^{(2)} = \chi(\bar{\Omega}_h)(e^{(2)} + \tilde{e})$, so wäre Verfahren 1 von der Ordnung h^{σ}.

Drei Ursachen sorgen jedoch für Abweichungen:

a) Die Bestimmungsgleichungen für $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ und $\tilde{e}$ werden nur numerisch gelöst.

b) Die rechten Seiten dieser Bestimmungsgleichungen werden nur näherungsweise durch Differenzenquotienten bestimmt.

c) Anstelle der Funktionen u bzw. u und $e^{(1)}$ werden nur die jeweils verfügbaren Differenzennäherungen für diese Größen verwendet.

Während man den durch b) bedingten Fehler nur durch Wahl genauerer und damit in der Regel aufwendigerer Differenzenformeln für die 4. bzw. 6. Ableitungen verkleinern kann, können die Einflüsse von a) und c) auf das Ergebnis durch eine Modifikation des Verfahrens verringert werden.

Man erwartet, daß $U_o^{(1)} := U^{(1)}$ eine bessere Näherung für u darstellt als $U^{(o)}$. Mithin sollte auch die Lösung $E_1^{(1)}$ von

$$
\begin{aligned}
&(-\mathcal{L}_{h,k}E_1^{(1)})(x) - f_u(x,U_o^{(1)}(x))E_1^{(1)}(x) \\
&\quad = \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{4!}\left(D_i^4 U_o^{(1)}(x) - h^2 D_i^4 E_o^{(1)}(x)\right) \\
&\quad = \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{4!} D_i^4 U^{(o)}(x) \qquad , \text{falls } x \in \Omega_h \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (8.1.4) \\
&E_1^{(1)}(x) = 0 \qquad , \text{falls } x \in \Gamma_h
\end{aligned}
$$

$e^{(1)}$ besser approximieren als $E_o^{(1)}$. Der Term $D_i^4 E_o^{(1)}(x)$ auf der rechten Seite dieser Gleichung berücksichtigt dabei die asymptotische Fehlerentwicklung des Differenzenverfahrens für $e^{(1)}$.

Durch Iteration erhält man schließlich Näherungen $U_\nu^{(1)}$ bzw. $E_\nu^{(1)}$ für u bzw. $e^{(1)}$. Eine Näherung $\tilde{E}_1^{(2)}$ von $\tilde{e}^{(2)}$ läßt sich nun aus (8.1.3) berechnen, indem man dort $U^{(1)}$ bzw. $E^{(1)}$ durch $u_\nu^{(1)}$ bzw. $E_\nu^{(1)}$ ersetzt. Die Berücksichtigung weiterer Terme aus den Fehlerentwicklungen für $E^{(1)}$ bzw. $\tilde{E}^{(2)}$ erscheint nicht sinnvoll, da deren Beitrag zum Gesamtergebnis von höherer Ordnung als der Restfehler der Entwicklung für u ist.

Die nunmehr beste Approximation $U^{(2)} := U^{(o)} - h^2 E_\nu^{(1)} - h^4 E_1^{(2)}$ für u kann nun wiederum in (8.1.4) zur Berechnung weiter verbesserter Näherungen für $e^{(1)}$ verwendet werden. Usw.

Zusammengefaßt führen diese Überlegungen auf folgendes Verfahren.

Verfahren 2:

Seien μ_o, $\nu_1, \ldots, \nu_{\mu_o} \in \mathbb{N}$, $\mu, \nu = 1$, $E^{(1)}_{1,o} := E^{(2)}_{1,o} := 0$.

a) Berechne eine Lösung $U^{(o)}$ von (8.1.1).
Setze $U^{(2)}_{1,o} := U^{(o)}$.

b) Löse

$$\begin{aligned}(-\mathcal{L}_{h,k} E^{(1)}_{\mu,\nu})(x) - f_u(x, U^{(2)}_{\mu,\nu-1}(x))\, E^{(1)}_{\mu,\nu}(x) \\ = \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{4!} D_i^4 (U^{(o)} - h^4 E^{(2)}_{\mu})(x) \quad , \text{ falls } x \in \Omega_h \\ E^{(1)}_{\mu,\nu}(x) = 0 \quad , \text{ falls } x \in \Gamma_h .\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

c) Setze $U^{(2)}_{\mu,\nu} := U^{(o)} - h^2 E^{(1)}_{\mu,\nu} - h^4 E^{(2)}$, $\nu := \nu + 1$.
Ist $\nu \leq \nu_\mu$, so gehe nach b)

d) Löse

$$\begin{aligned}(-\mathcal{L}_{h,k} \tilde{E}^{(2)}_{\mu+1})(x) - f_u(x, U^{(2)}_{\mu,\nu}(x))\tilde{E}^{(2)}_{\mu+1}(x) \\ = \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{2}{6!} D_i^6 U^{(2)}_{\mu,\nu}(x) + \frac{2}{4!} D_i^4 E^{(1)}_{\mu,\nu}(x) \Big) \\ + (f, U^{(2)}_{\mu,\nu}(x), E^{(1)}_{\mu,\nu}(x)) \quad , \text{ falls } x \in \Omega_h \\ \tilde{E}^{(2)}_{\mu+1}(x) = 0 \quad , \text{ falls } x \in \Gamma_h .\end{aligned} \tag{8.1.6}$$

e) Setze $U^{(2)}_{\mu+1,o} := U^{(1)}_{\mu,\nu} - h^4 \tilde{E}^{(2)}_{\mu+1}$, $\mu := \mu + 1$.
Ist $\mu \leq \mu_o$, so gehe nach b).

Anstatt die Größen ν_μ, μ_o a priori vorzugeben, kann man die einzelnen Schleifen auch dann beenden, wenn eine Weiterführung keine dem Aufwand entsprechende Verbesserung mehr erwarten läßt.

Verfahren 2 ist wegen der iterativen Berechnung der Korrekturen wesentlich aufwendiger als Verfahren 1.

Durch Linearisierung von f_u ist es möglichen, Gleichung (8.1.5) für $\nu = \nu_\mu$ und Gleichung (8.1.6) näherungsweise in einem Schritt zu lösen. Setzt man noch $\mu = 1$, $\nu_1 = 2$, so wird man auf die folgende vereinfachte Variante von Verfahren 2 geführt:

Verfahren 3:

a)-b) Durchlaufe die entsprechenden Schritte von Verfahren 2 einmal.

c) Setze $U^{(1)} := U^{(o)} - h^2 E^{(1)}_{1,1}$

d) Löse

$$
\begin{aligned}
&(-\mathcal{L}_{h,k}\tilde{E}^{(2)})(x) - f_u(x,U^{(1)}(x))\tilde{E}^{(2)}(x) \\
&= \mathcal{D}(x) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{6!} D_i^6 U^{(1)}(x) - \frac{2}{4!} D_i^4 E^{(1)}_{1,1}(x) \right) \\
&\qquad - (f, U^{(1)}(x), E^{(1)}_{1,1})(x) \qquad , \text{ falls } x \in \Omega_h \\
&\tilde{E}^{(2)} = 0 \qquad , \text{ falls } x \in \Gamma_h .
\end{aligned}
\tag{8.1.7}
$$

e) Setze $U^{(2)} := U^{(1)} - h^4 \tilde{E}^{(2)}$.

Konvergenzbeweise für die Verfahren 2 und 3 sind nicht bekannt. Numerische Tests, über die im nächsten Abschnitt berichtet wird, zeigen jedoch ihre praktische Brauchbarkeit.

Die Verfahren 1-3 haben gegenüber der Richardson-Extrapolation den Vorteil, daß das Gittergebiet Ω_h und der Differenzenoperator $\mathcal{L}_{h,k}$ während der ganzen Rechnung konstant bleiben.
Bei der Behandlung linearer elliptischer Systeme lassen sich deshalb direkte Methoden zur Lösung der diskreten

Gleichungen mit Vorteil anwenden. Ein entsprechendes Beispiel für den skalaren Fall findet man in [52], wo als direktes Verfahren die Capacitance-Matrix-Methode (vgl. [53]) verwendet wird.
Auch bei der numerischen Behandlung semilinearer Differentialgleichungen ergeben sich bei Anwendung geeigneter Methoden zur Lösung der auftretenden Gleichungssysteme wesentliche Vorteile gegenüber der Richardson-Extrapolation. Einzelheiten hierzu werden im nächsten Abschnitt behandelt.

8.2 Numerische Beispiele

Um Anhaltspunkte für den Genauigkeitsgewinn bei Anwendung der im letzten Abschnitt beschriebenen Verfahren zu erhalten, haben wir auf der Rechenanlage TR 440 des Zentrums für Datenverarbeitung der Universität Tübingen eine Reihe von numerischen Beispielen gerechnet.
Um die Dimension der i.a. nichtlinearen Gleichungssysteme und damit sowohl die zu ihrer Lösung benötigte Rechenzeit als auch den Speicherplatzbedarf auf ein vernünftiges Maß zu beschränken, wurden nur skalare Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x,u(x)) && x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) && x \in \Gamma \end{aligned} \qquad (8.2.1)$$

betrachtet. In unseren Versuchen waren $n = 2$ und
$\Omega := \{(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 0.5\}$.

Da wir u.a. auch den Einfluß von Eigenschaften der Lösung auf das Verhalten der Verfahren untersuchen wollten, wählten wir f von der speziellen Gestalt

$$f_v^{(1)}(x,u) = -\Delta v(x) - \lambda(v(x)^2 - u(x)^2) \qquad (8.2.2)$$

bzw.

$$f_v^{(2)}(x,u) = -\Delta v(x) - \lambda(\exp(v(x)) - \exp(u(x))), \qquad (8.2.3)$$

mit $v \in C^2(\bar{\Omega})$. Setzt man noch $g := \chi(\Gamma)v$, so ist für $f = f_v^{(1)}$ bzw. $f = f_v^{(2)}$ v gerade eine Lösung von (8.2.1). Der Parameter λ erlaubte, jeweils Vorzeichen und Größe von f_u zu beeinflussen.
Als Näherungen D_i^4 bzw. D_i^6 für ∂_i^4 bzw. ∂_i^6 wurden die üblichen symmetrischen 5- bzw. 7-Punkte-Differenzenformeln benutzt (vgl. [14]). Dabei kommt es nahe am Rand von Ω vor, daß Punkte, in denen der Funktionswert in der Differenzenformel benötigt wird, nicht mehr in Ω liegen. Wie

in Abschnitt 3.2 wurden für solche Punkte Hilfswerte durch eindimensionale polynomiale Extrapolation vom Grad $\tilde{k}$ längs Gitterlinien berechnet. In den Beispielen wurden für $\tilde{k}$ Werte zwischen 2 und 8 getestet. Die besten Resultate ergaben sich für $\tilde{k} = 6$ in D_i^4 und $\tilde{k} = 8$ in D_i^6.

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (8.1.1) wurde das Newtonverfahren benutzt. Um Divergenz bzw. Konvergenz gegen weitere eventuell existierende Lösungen der diskreten Gleichungen so weit als möglich auszuschließen, wurde stetes mit der exakten Lösung der Differentialgleichung gestartet.

Zur Lösung der im Newtonverfahren auftretenden linearen Gleichungssysteme mußte ein direktes Verfahren gewählt werden, da iterative Verfahren wegen der Freiheit in Betrag und Vorzeichen von f_u i.a. nicht konvergieren[1)]. Wir haben in unseren Versuchen eine Adaption der Gaußschen LR-Zerlegung mit eingeschränkter Pivotsuche für schwach besetzte, nicht notwendig symmetrische Matrizen gewählt. Entsprechende Unterprogramme standen in Form der FORTRAN-Routinen F01BRF, F01BSF und F04AXF der NAG-Library (Version 8) zur Verfügung. Dieser Routinensatz ist so aufgebaut, daß die eigentliche LR-Zerlegung von F01BRF durchgeführt wird, wobei alle für die Zerlegung wesentlichen Informationen gespeichert werden. Die Faktorisierung jeder weiteren Matrix mit derselben Verteilung von Nicht-Null-Elementen wird von F01BSF in einem Bruchteil der von B01BRF benötigten Zeit durchgeführt. F04AXF dient zur anschließenden Lösung des linearen Gleichungssystems. Diese Routinen sind für unsere Zwecke besonders geeignet, da sowohl die inneren Gleichungssysteme des Newtonverfahrens als auch die Gleichungssysteme der Korrekturschritte dieselbe Verteilung der Nicht-Null-Einträge besitzen.

---

1) Aus demselben Grund läßt sich im vorliegenden Fall auch das Newton-SOR-Verfahren nicht anwenden.

In allen Beispielen wurde h = 0.05 gewählt. Ω_h bestand aus 305, Γ_h^x aus 56 Gitterpunkten. Auf jeder Gitterlinie lagen mindestens 9 Gitterpunkte, so daß (V_k) erfüllt war.

Da sich bereits bei der Behandlung linearer Gleichungen gezeigt hatte, daß das "naive" Verfahren 1 keine besonders guten Ergebnisse liefert (vgl. [45]), wurde es nicht weiter betrachtet.
An einer Reihe von Beispielen wurden die Verfahren 2 und 3 verglichen. Die Resultate von Verfahren 2 waren dabei nach dem ersten Korrekturschritt erwartungsgemäß besser als die von Verfahren 3. Nach der zweiten Korrektur unterschieden sich die Fehler von beiden Verfahren nie um mehr als 20%, wobei das bessere Resultat meistens von Verfahren 2 geliefert wurde. Aus diesem Grunde wurde das volle Testprogramm nur für Verfahren 3 durchgerechnet.

Um den Einfluß der näherungsweisen Berechnung der rechten Seiten in den Korrekturgleichungen abschätzen zu können, wurden die Beipiele zusätzlich mit exakter rechter Seite in der ersten Korrektur gerechnet. Das zu diesem Zweck entsprechend modifizierte Verfahren 3 wird im folgenden als Verfahren e bezeichnet.

Alle Beipiele wurden für k = 2,4,6 gerechnet. Der Wert k = 6 wurde hinzugenommen, da die in [45], [46] gerechneten linearen Beipiele die Vermutung nahelegen, daß für diesen Randextrapolationsgrad ebenfalls asysmptotische Fehlerentwicklungen bezüglich der Maximumsnorm existieren (vgl. auch [61]).

Einen Überblick über die Fehler $F^{(0)}$, $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ der Näherungslösungen $U^{(0)}$, $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ der einzelnen Testprobleme enthalten die Tabellen 1-6. Dargestellt ist jeweils der lineare Fall ($\lambda = 0$), sowie das schlechteste und beste Resultat. Generell zeigte es sich, daß für negatives λ die Fehler mit fallendem λ kleiner wurden. Für positives λ zeigte der Fehler in Abhängigkeit von λ ein stark oszillatorisches Verhalten. Beide Beobachtungen las-

sen sich durch die Verteilung der Eigenwerte und deren Einfluß auf die Norm der Inversen der linearisierten Gleichungen erklären.

Im Einzelnen haben wir Probleme mit folgenden Lösungen betrachtet:

i) $u(x_1,x_2) = (2x_1)^4 + (2x_2)^4$.
Bei Anwendung von Verfahren 3 mit $k = 4$ oder $k = 6$ erwartet man eine recht gute Approximation der exakten Lösung. Auftretende Fehler nach den Korrekturschritten sind im wesentlichen auf den Einfluß der Nichtlinearität zurückzuführen.

ii) $u(x_1,x_2) = \sin(2x_1 + 2x_2)$.
Dies ist ein Beipiel für eine sehr glatte, aber nicht mehr polynomiale Lösung.

iii) $u(x_1,x_2) = (2x_1)^{10} + (2x_2)^{10}$.
Diese Funktion wächst unmittelbar außerhalb des Gebiets sehr stark an. Sowohl die Differenzennäherungen D_i^4 und D_i^6 als auch die im Differenzenverfahren und in der Approximation von ∂_i^4 und ∂_i^6 benutzte polynomiale Extrapolation arbeiten in diesem Fall recht schlecht.

k	λ	Verf.	$F^{(0)}$	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$
2	0	3	9.3 E-3	1.4 E-3	1.4 E-3
		e	9.3 E-3	1.0 E-3	1.0 E-3
	200	3	1.1 E-3	1.4 E-3	1.2 E-2
		e	1.1 E-3	1.4 E-3	1.2 E-2
	-200	3	5.8 E-3	9.4 E-4	9.5 E-4
		e	5.8 E-3	9.3 E-4	9.4 E-4
4	0	3	1.0 E-2	5.1 E-11	5.1 E-11
		e	1.0 E-2	4.7 E-11	4.7 E-11
	200	3	1.4 E-2	1.6 E-3	4.1 E-4
		e	1.4 E-2	1.9 E-3	4.6 E-4
	-200	3	6.0 E-3	1.4 E-4	5.6 E-6
		e	6.0 E-3	1.7 E-4	5.7 E-6
6	0	3	1.0 E-2	5.8 E-11	5.8 E-11
		e	1.0 E-2	5.5 E-11	5.5 E-11
	200	3	1.3 E-2	1.6 E-3	4.0 E-4
		e	1.3 E-2	1.8 E-3	4.7 E-4
	-200	3	6.0 E-3	1.4 E-4	5.6 E-6
		e	6.0 E-3	1.3 E-4	5.5 E-6

Tabelle 1

Fehler für Problem (8.2.1) mit $f=f_v^{(1)}$ und $g=\chi(\Gamma)v$.
Lösung $u(x_1,x_2)=v(x_1,x_2)=(2x_1)^4+(2x_2)^4$.
Gerechnet für $\lambda=0,\pm10,\pm50,\pm100,\pm200,1000$.

k	λ	Verf.	$F^{(0)}$	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$
2	15	3	3.2 E-2	6.8 E-3	5.2 E-3
		e	3.2 E-2	6.2 E-3	4.9 E-3
	-15	3	6.2 E-3	1.2 E-3	1.2 E-3
		e	6.2 E-3	9.9 E-4	9.9 E-4
4	15	3	3.5 E-2	1.4 E-3	8.4 E-5
		e	3.5 E-2	9.9 E-4	8.1 E-5
	-15	3	6.6 E-3	1.3 E-5	8.1 E-8
		e	6.6 E-3	6.2 E-6	6.3 E-8
6	15	3	3.5 E-2	1.4 E-3	8.4 E-5
		e	3.5 E-2	1.1 E-3	8.1 E-5
	-15	3	6.6 E-3	1.3 E-5	8.0 E-8
		e	6.6 E-3	6.2 E-6	7.3 E-8

Tabelle 2

Fehler für Problem (8.2.1) mit $f=f_v^{(2)}$ und $g=\chi(\Gamma)v$.
Lösung $u(x_1,x_2)=v(x_1,x_2)=(2x_1)^4+(2x_2)^4$.
Gerechnet für $\lambda=0,\pm2.5,\pm5,\pm10,\pm15$.
Für $\lambda=0$ siehe Tabelle 1.

k	λ	Verf.	$F^{(0)}$	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$
2	0	3	5.7 E-6	1.1 E-5	1.6 E-5
		e	5.7 E-6	9.8 E-6	1.3 E-5
	200	3	1.3 E-5	2.7 E-5	3.9 E-5
		e	1.3 E-5	1.2 E-5	2.3 E-5
	-200	3	4.5 E-6	5.2 E-6	5.3 E-6
		e	4.5 E-6	4.7 E-6	4.9 E-6
4	0	3	3.4 E-6	1.3 E-8	1.7 E-8
		e	3.4 E-6	5.9 E-9	5.7 E-9
	200	3	8.0 E-6	3.2 E-6	1.1 E-6
		e	8.0 E-6	3.6 E-8	7.9 E-9
	-200	3	1.1 E-6	1.4 E-8	1.2 E-8
		e	1.1 E-6	5.1 E-9	4.8 E-9
6	0	3	3.6 E-6	2.8 E-10	1.4 E-10
		e	3.6 E-6	1.7 E-10	9.8 E-11
	200	3	8.1 E-6	3.3 E-6	1.2 E-6
		e	8.1 E-6	3.1 E-8	6.9 E-9
	-200	3	1.1 E-6	1.6 E-8	1.4 E-8
		e	1.1 E-6	3.2 E-9	1.1 E-9

Tabelle 3

Fehler für Problem (8.2.1) mit $f=f_v^{(1)}$ und $g=\chi(\Gamma)v$.

Lösung $u(x_1,x_2)=v(x_1,x_2)=\sin(2x_1+2x_2)$.

Gerechnet für $\lambda=0,\pm10,\pm50,\pm100,\pm200,1000$.

k	λ	Verf.	$F^{(0)}$	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$
2	15	3	2.3 E-5	4.7 E-5	4.9 E-5
		e	2.3 E-5	3.1 E-5	3.9 E-5
	-15	3	5.2 E-6	4.9 E-6	5.0 E-6
		e	5.2 E-6	4.7 E-6	4.9 E-6
4	15	3	2.1 E-5	7.7 E-6	5.3 E-6
		e	2.1 E-5	9.8 E-8	3.5 E-8
	-15	3	1.9 E-6	3.3 E-8	2.9 E-8
		e	1.9 E-6	6.8 E-9	6.1 E-9
6	15	3	2.3 E-6	7.9 E-6	7.3 E-6
		e	2.3 E-6	8.7 E-8	2.4 E-8
	-15	3	1.7 E-6	3.1 E-8	2.6 E-8
		e	1.7 E-6	3.8 E-9	1.9 E-9

Tabelle 4

Fehler für Problem (8.2.1) mit $f=f_v^{(2)}$ und $g=\chi(\Gamma)v$.

Lösung $u(x_1,x_2)=v(x_1,x_2)=\sin(2x_1+2x_2)$.

Gerechnet für $\lambda=0,\pm2.5,\pm5,\pm10,\pm15$.

Für $\lambda=0$ siehe Tabelle 3.

k	λ	Verf.	$F^{(0)}$	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$
2	0	3	3.3 E-2	1.7 E-2	1.6 E-2
		e	3.3 E-2	1.7 E-2	1.8 E-2
	200	3	2.1 E-1	3.0 E-1	3.0 E-1
		e	2.1 E-1	3.0 E-1	3.0 E-1
	-200	3	1.4 E-2	9.9 E-3	1.0 E-2
		e	1.4 E-2	9.8 E-3	9.9 E-3
4	0	3	4.1 E-2	1.8 E-3	2.2 E-3
		e	4.1 E-2	1.2 E-3	1.0 E-3
	200	3	3.7 E-2	6.9 E-2	3.1 E-2
		e	3.7 E-2	7.4 E-2	3.0 E-2
	-200	3	1.5 E-2	1.0 E-3	1.2 E-3
		e	1.5 E-2	8.4 E-4	5.3 E-4
6	0	3	4.3 E-2	1.9 E-3	6.1 E-4
		e	4.3 E-2	6.5 E-4	3.2 E-4
	200	3	keine Konvergenz		
		e	keine Konvergenz		
	-200	3	1.6 E-2	5.4 E-4	4.8 E-4
		e	1.6 E-2	4.2 E-4	3.9 E-4

Tabelle 5

Fehler für Problem (8.2.1) mit $f=f_v^{(1)}$ und $g=\chi(\Gamma)v$.
Lösung $u(x_1,x_2)=v(x_1,x_2)=(2x_1)^{10}+(2x_2)^{10}$.
Gerechnet für $\lambda=0,\pm10,\pm50,\pm100,\pm200,1000$.

k	λ	Verf.	$F^{(0)}$	$F^{(1)}$	$F^{(2)}$
2	15	3	1.2 E-1	1.5 E-1	1.2 E-1
		e	1.2 E-1	6.2 E-2	4.9 E-2
	-15	3	1.8 E-2	2.8 E-2	3.3 E-2
		e	1.8 E-2	1.3 E-2	1.7 E-2
4	15	3	1.6 E-1	2.9 E-2	1.1 E-2
		e	1.6 E-1	1.7 E-2	1.5 E-2
	-15	3	2.3 E-2	1.1 E-3	1.4 E-3
		e	2.3 E-2	9.7 E-4	9.9 E-4
6	15	3	1.7 E-1	5.0 E-2	9.5 E-3
		e	1.7 E-1	3.5 E-2	1.8 E-3
	-15	3	2.3 E-2	6.8 E-4	7.5 E-4
		e	2.3 E-2	6.8 E-4	2.2 E-4

Tabelle 6

Fehler für Problem (8.2.1) mit $f=f_v^{(2)}$ und $g=\chi(\Gamma)v$.
Lösung $u(x_1,x_2)=v(x_1,x_2)=(2x_1)^{10}+(2x_2)^{10}$.
Gerechnet für $\lambda=0,\pm2.5,\pm5,\pm10,\pm15$.
Für $\lambda=0$ siehe Tabelle 5.

Literaturverzeichnis

[1] Adams, R.A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York and London 1975

[2] Allgower, E; Guenther, R.: A functional analytic approach to the numerical solution of nonlinear elliptic equa-ions tions. Computing 2, 25-33 (1967).

[3] Amann, H.: Invarinat sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic equations. J. Math. Anal. Appl. 65, 432-467 (1978)

[4] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Grundzüge der Maßtheorie. de Gruyter, Berlin 1968

[5] Berman, A.; Plemmons, R.J.: Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York, San Francisco, London 1979

[6] Bers, L.: On mildly nonlinear partial differential equations of elliptic type. J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 51, 229-236 (1953)

[7] Böhmer, K.: High order difference methods for quasilinear elliptic boundary value problems on general regions. Technical Summary Report 2042, Mathematical Research Center, Madison 1980

[8] Böhmer, K.: Asymptotic expansion for the discretization error in linear elliptic boundary value problems on general regions. Math. Z. 177, 235-255 (1981)

[9] Bramble J.H.; Hubbard, B.E.: A theorem on error estimation for finite difference analogues of the Dirichlet problem for elliptic equations. Contributions to Differential Equations 2, 319-340 (1963)

[10] Bramble, J.H.: Error estimates for difference methods in forced vibrations. SIAM J. Numer. Anal. 3, 1-12 (1966)

[11] Bramble, J.H.; Thomée, V.: Pointwise bounds for discrete Green's functions. SIAM J. Numer. Anal. 6, 583-590 (1969)

[12] Ciarlet, P.G.: Discrete maximum principle for finite-difference operators. Aequationes Math. 4, 338-352 (1970)

[13] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1968

[14] Collatz, L.: The numerical treatment of differential equations. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960, 3.Auflage

[15] Courant, R.; Hilbert, D.: Methoden der Mathematischen Physik II. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968

[16] Fitzke, A.: On a system of difference inequalities of parabolic type. Ann. Polon. Math. 22, 299-302 (1970)

[17] Fitzke, A.: A convergence proof of a difference scheme for a parabolic system. Ann. Polon. Math. 22, 317-320 (1970)

[18] Forsythe, G.E.; Wasow, W.: Finite difference methods for partial differential equations. Wiley, New York 1960

[19] Frehse, J.: Existenz und Konvergenz von Lösungen nichtlinearer elliptischer Differenzengleichungen und zugehörige Variationsprobleme. Dissertation, Frankfurt/Main 1967

[20] Frehse, J.: Über die Konvergenz von Differenzen- und anderen Näherungsverfahren bei nichtlinearen Variationsproblemen. ISNM Bd.15, Birkhäuser-Verlag, Basel 1969

[21] Frehse, J.: Existenz und Konvergenz von Lösungen nichtlinearer elliptischer Differenzengleichungen unter Dirichlet-Randbedingungen. Math. Z. 109, 311-343 (1969)

[22] Frehse, J.: Morrey space methods in the theory of elliptic difference equations, in: Ansorge, R.; Törnig, W. (Hrsg): Numerische, insbesondere approximationstheoretische Behandlung von Funktionalgleichungen. Lecture Notes in Mathematics 333, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York 1973

[23] Gerschgorin, S.: Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. ZAMM 10, 373-382 (1930)

[24] Greenspan, D.; Parter, S.V.: Mildly nonlinear elliptic partial differential equations und their numerical solution II. Numer. Math. 7, 129-146 (1965)

[25] Gorenflo, R.: Monotonic difference schemes for weakly coupled systems of parabolic differential equations, in: Morris, J.L.: Conference on the numerical solution of differential equations, Dundee 1969. Lecture Notes in Mathematics 109, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970

[26] Gorenflo, R.: Differenzenschemata monotoner Art für schwach gekoppelte Systeme parabolischer Differentialgleichungen mit gemischten Randbedingungen. Computing 8 , 343-362 (1971)

[27] Grigorieff, R.D.: Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren I. Math. Nachr. 55, 233-249 (1973)

[28] Grigorieff, R.D.: Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren II. Math. Nachr. 55, 251-263 (1973)

[29] Hadeler, K.P.; Rothe, F.; Vogt, H.: Stationary solutions of reaction-diffusion-equations. Math. Meth. in the Appl. Sci. 1, 418-431 (1979)

[30] Henry, D.: Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics 840. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1981

[31] Jeggle, H.: Über die Approximation von linearen Gleichungen 2.Art und Eigenwertprobleme in Banachräumen. Math. Z. 124, 319-342 (1972)

[32] Kamke, E.: Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II. Acta Math. 58, 57-85 (1932)

[33] Keller, H.B.: Approximation methods for nonlinear problems with application to two-point boundary problems. Math. Comp. 29, 464-474 (1975)

[34] Ladyženskaja, O.A.; Ural'ceva, N.N.: Linear and quasilinear elliptic equations. Academic Press, New York, London 1968

[35] Ladyzenskaja, O.A.; Solonnikov, V.A.; Ural'ceva, N.N.: Linear and quasilinear parabolic equations. AMS, Providence, Rhode Island 1968

[36] Lions, J.L.; Magenes, E.: Non-homogeneous boundary value problems and applications I-III. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg-New York 1973

[37] McAllister, G.T.: Some nonlinear elliptic partial differential equations and difference equations. SIAM J. 12, 772-777 (1964)

[38] McAllister, G.T.: Quasilinear uniformly elliptic partial differential equations and difference equations. SIAM J. Numer. Anal. 3, 13-33 (1966)

[39] McAllister, G.T.: Dirichlet problems for mildly nonlinear elliptic difference equations. J. Math. Anal. Appl. 27, 338-366 (1969)

[40] Meis, Th.: Zur Diskretisierung nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen. Computing 7, 344-352 (1971)

[41] Meyer-Spasche, R.: Numerische Behandlung von elliptischen Randwertproblemen mit mehreren Lösungen und von MHD-Gleichgewichtsproblemen. Dissertation, Hamburg 1975

[42] Meyer-Spasche, R.: A note on the approximation of mildly nonlinear Dirichlet problems by finite differences. Numer. Math. 33, 303-313 (1979)

[43] Mimura, M.; Kametaka, Y.; Yamaguti, M.: On a certain difference scheme for some semilinear diffusion system. Proc. Japan Acad. 47, 385-387 (1971)

[44] Müller, M.: Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale. Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss., math-naturw. Kl. 1927, 9.Abhandlung

[45] Munz, H.: Differenzenverfahren für elliptische Randwertaufgaben mit verbesserter Randinterpolation. Diplomarbeit, Tübingen 1978

[46] Munz, H.: Uniform expansions for a class of finite difference schemes for elliptic boundary value problems. Math. Comp. 36, 155-170 (1981)

[47] Necas, J,: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prag 1967

[48] Parter, S.V.: Mildly nonlinear elliptic partial differential equations and their numerical solution I. Numer. Math. 7, 133-128 (1965)

[49] Parter, S.V.: Maximal solutions of mildly nonlinear elliptic equations, in: Numer. Solutions nonlinear differential equations Proc. advanced Sympos. Madison 1966, 213-238

[50] Pereyra, V.: Iterated deferred corrections for nonlinear operator equations. Numer. Math. 10, 316-323 (1967)

[51] Peryra, V.: Accelerating the convergence of discretization algorithms. SIAM J. Numer. Anal. 4, 508-533 (1967)

[52] Pereyra, V.; Proskurowski, W.; Widlund, O.: High order fast Laplace solvers for the Dirichlet problem on general regions. Math. Comp. 31, 1-16 (1977)

[53] Proskurowski, W.; Widlund, O.: On the numerical solution of Helmholtz's equation by the capacitance method. Math. Comp. 30, 433-468 (1976)

[54] Reed, M.; Simon, B.: Methods of modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press, New York, San Francisco, London 1975

[55] Riesz, M.: L'integral de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math. 81, 1-270 (1949)

[56] Rothe, F.: Solutions of systems of nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions. Math. Meth. in the Appl. Sci. 1, 545-553 (1979)

[57] Rothe, F.: a priori estimates, global existence and asymptotic behaviour of weakly coupled systems of reaction-diffusion-equations. Manuscript, Universität Tübingen 1983

[58] Schleinkofer, G.: Approximation der Lösungen parabolischer Differentialgleichungen mit der Linienmethode. Manuskript, Universität Mainz 1972

[59] Simpson, R. B. : Finite difference methods for mildly nonlinear eigenvalue problems. SIAM J. NUmer. Anal. 7, 190-211 (1971)

[60] Simpson, R. B. : Existence and error estimates for solutions of a discrete analog of nonlinear eigenvalue problems. Math. Comp. 26, 359-375 (1972)

[61] Starius, G.: Asymptotic expansions for a class of finite difference schemes. Math. Comp. 37, 321-326 (1981)

[62] Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972

[63] Stummel, F.: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren I. Math. Ann. 190, 45-97 (1970)

[64] Stummel, F.: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren II. Math. Z. 120, 231-264 (1971)

[65] Stummel, F.: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren III. Proc. Oberwolfach Conference in linear operators and approximations. ISNM 20, Birkhäuser Verlag, Basel 1972

[66] Stummel, F.: Elliptische Differenzenoperatoren unter Dirichlet Randbedingungen. Math. Z. 97, 169-211 (1967)

[67] Thomee, V.: Discrete interior Schauder estimates for elliptic difference operators. SIAM J. Numer. Anal. 5, 626-645 (1968)

[68] Vainikko, G.: Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Teubner Verlag, Leipzig 1976

[69] Voigt, A.: The method of lines for nonlinear parabolic differential equations with mixed derivatives. Numer. Math. 32, 197-207 (1979)

[70] Walter, W.: Differential- und Integralungleichungen. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol 2. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1964

[71] Walter, W.: Die Linienmethode bei nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen. Numer. Math. 12, 307-321 (1968)

[72] Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976

[73] Weinberger, H.F.: Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic equations. Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. 2, 263-309 (1978)

[74] Zacharias, K.; Gröger, K.; Gajewski, H.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1974

LEBENSLAUF

Am 31.12.1952 wurde ich als Sohn des Sachbearbeiters Ernst Munz und dessen Ehefrau Gerta geb. Deupel in Stuttgart geboren. Nach vierjähriger Grundschulzeit besuchte ich ab Ostern 1964 das Zeppelin-Gymnasium in Stuttgart. Im Sommer 1968 wechselte ich an das Graf-Eberhard-Gymnasium in Urach, wo ich im Juni 1972 das Abitur bestand.
Im Wintersemester 1972/73 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen, gefördert durch ein Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes. Das Studienjahr 1975/76 verbrachte ich an der University of Exeter Großbritannien. Im Frühjahr 1979 legte ich in Tübingen das 1. Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik ab. Im Juli desselben Jahres erhielt ich das Diplom in Mathematik. Ab Oktober 1979 war ich am Lehrstuhl für Biomathematik der Universität Tübingen als wissenschaftliche Hilfskraft angestellt. Seit April 1980 bin ich als Wissenschaftlicher Angestellter am selben Lehrstuhl tätig. Die vorliegende Arbeit entstand zwischen Februar 1981 und März 1983 unter Anleitung von Prof. Dr. K.-P. Hadeler.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren, Dozenten und Akademischen Räten

in Mathematik:
G.Betsch, C.Constantinescu, W.Grölz, K.-P.Hadeler, S.Kowitz, H.Kaul, H.Kurzweil, F.Locher, R.Nagel, H.Salzmann, P.Schmid, H.Wielandt, A.Wolf, M.Wolff, K.Zeller;

in Physik:
M.Baumann, W.Dittrich, F.Gönnenwein, H.Krüger, F.Lenz, G.Mack, G.Mertens, G.Möllenstedt, E.Schmid, G.Staudt.

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69